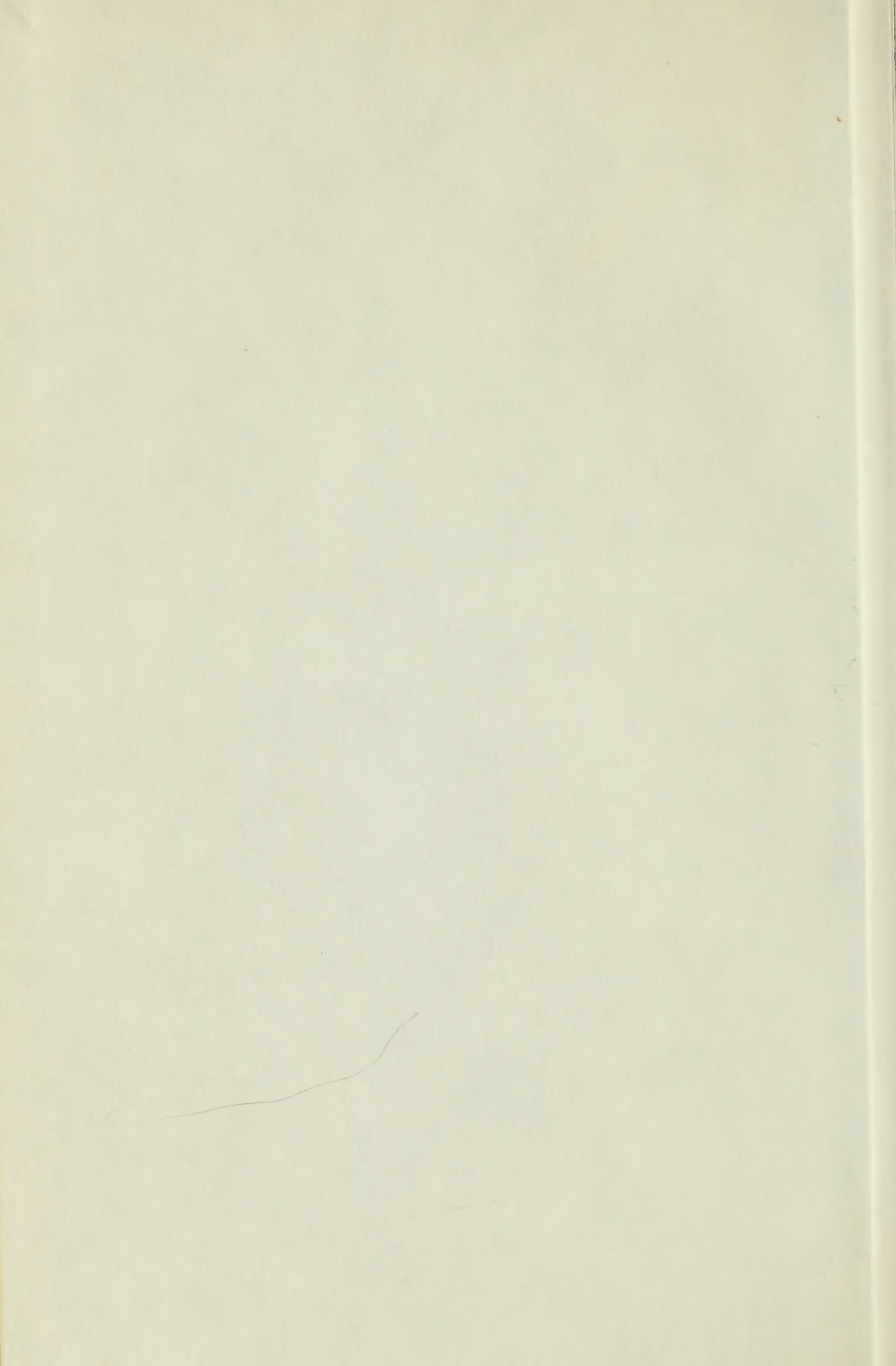
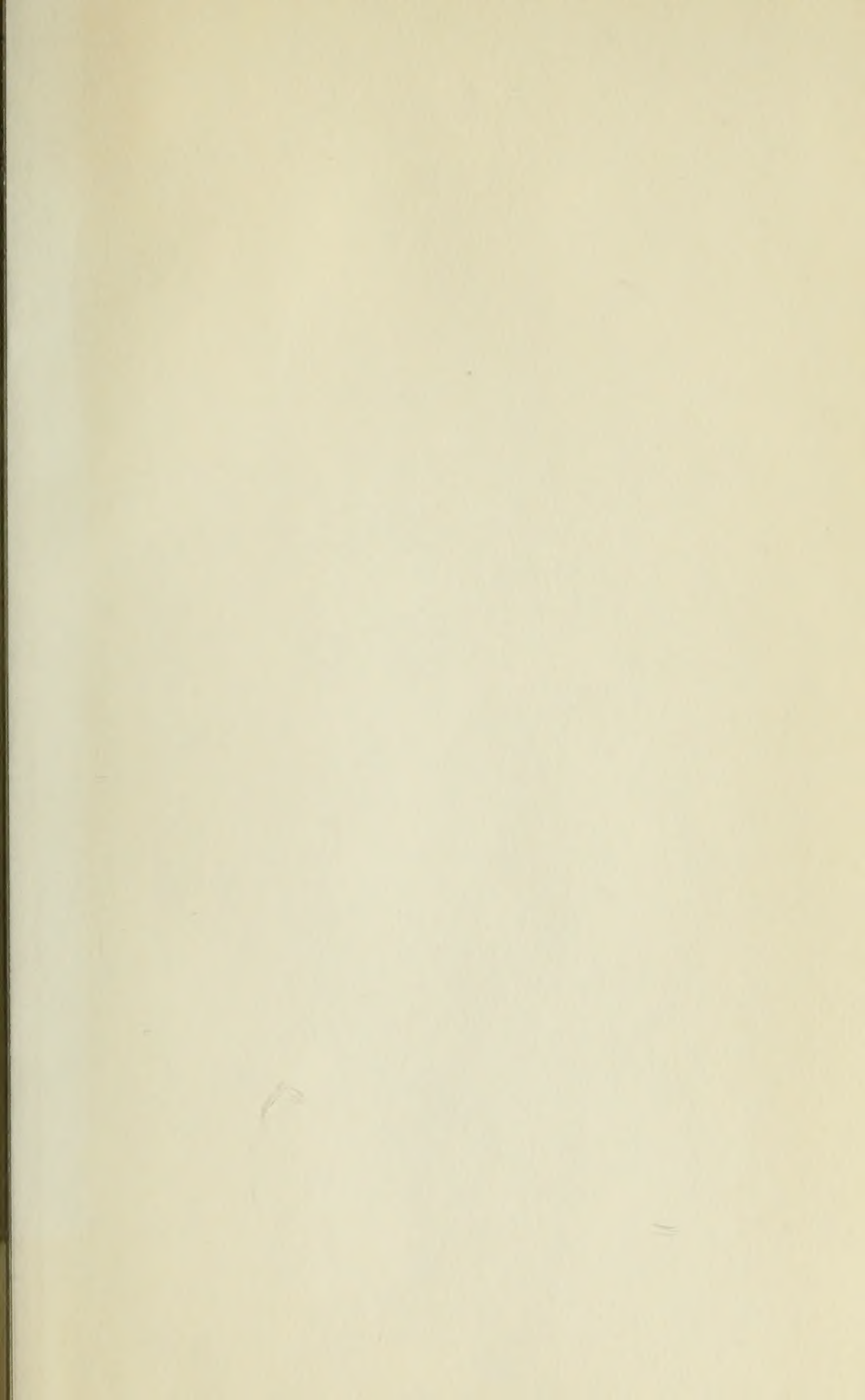









商務印書館出版

Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen

The Commercial Press, Limited

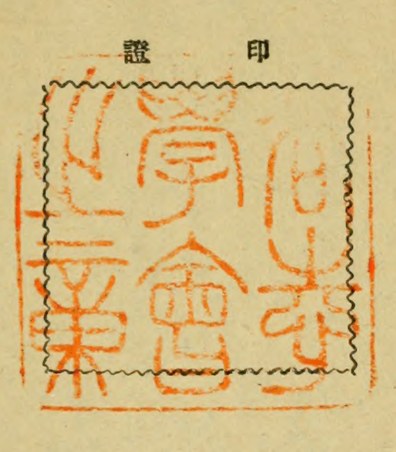
中華民國十四年三月初版

(尚志學會叢書)相對原理及其推論一册

(每册定價大洋叁角)

(外埠酌加運費匯費)

印證



原著者 A. Einstein

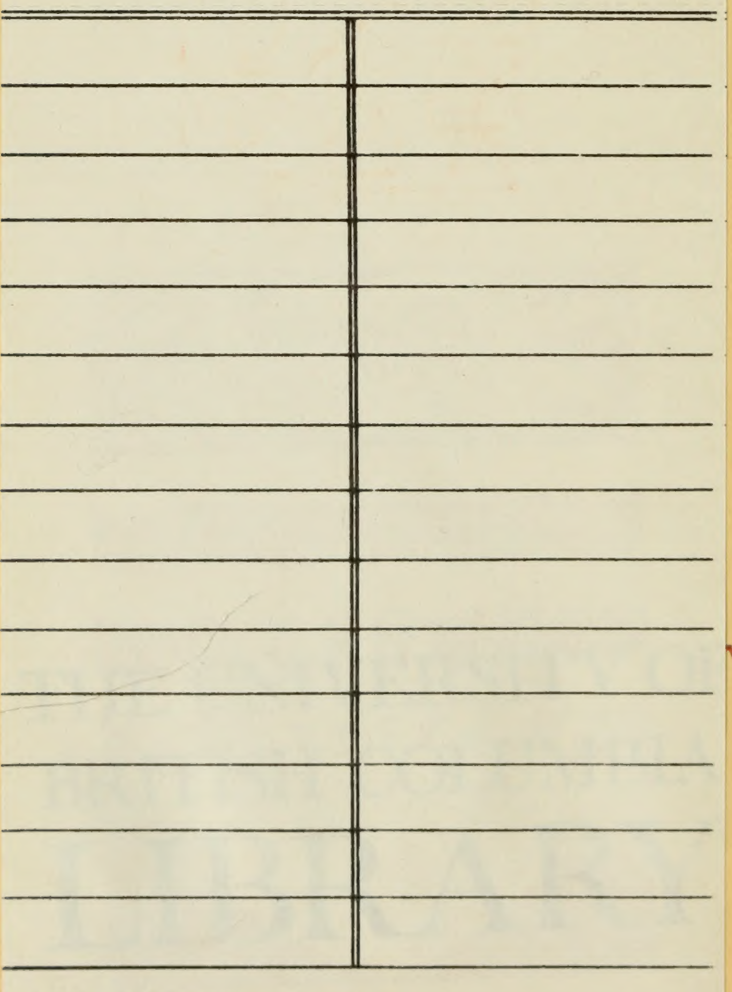
譯述者 文元模

發行者 商務印書館

印刷所 商務印書館 上海北河南路北首寶山路

總發行所 商務印書館 上海棋盤街中市

分售處 商務印書分館 北京 天津 保定 奉天 吉林 龍江 濟南 太原 開封 西安 南京 杭州 蘭谿 安慶 蕪湖 南昌 漢口 長沙 常德 衡州 成都 重慶 廈門 福州 廣州 潮州 香港 梧州 雲南 貴陽 張家口 新嘉坡


University of British Columbia Library
DUE DATE
ET-6 BP 74-453

歸於烏有. 是實爲一重要之結果. 余以爲由此結果,則普遍相對論不獨對物理學之要求能滿足,卽對於認識論(Erkenntnistheorie)之要求亦能滿足矣.

以上所述,卽余建設相對論時所歷路程之大略也.

(終)

曼(Riemann). 於是余請教於格君曰:"余之問題果能以黎曼之理論解決乎?余所欲求之係數,果能由線素(Linienelement)不變之假說完全決定乎?"格君允爲余助,至一九一三年,余與君遂共成一文.[1] 然正確之萬有引力方程式猶未得也. 其後余再將黎曼之理論反覆研究,終不能得余所欲得之結果. 如是者又二年,始發見以前計算之誤. 余於是再借助於不變論,以求萬有引力之方程式. 二星期後,余之豫期卽實現於眼前矣.

一九一五年以後,余研究之問題雖有種種,然今日可言之於諸君者,惟有宇宙論之問題. 此問題之宗旨在論宇宙幾何學與時間,普遍相對論之界限條件之研究與馬赫對於惰性之思想,實爲此理論之根據. 雖馬赫對於惰性之相對的本質未有明確之意見,然余受其精神的影響至深且大,無可疑也.

余因欲保萬有引力方程式之界限條件不變,遂以世界爲封閉的空間(Geschlossenes Kontinuum), 除去其界限,卽得解出宇宙問題. 由此推知惰性爲物體相對的性質,必物體與物體對立時始顯;若對立之物體不存,則惰性亦

(1) 譯者註: 此文題曰: "Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation."

則成於其前.

有加速度之座標系與無加速度之座標系,皆有平等之價值,馬赫亦曾言之. 然此主張實與吾人之幾何學兩不相容. 何則,若吾人承認一切座標系皆爲平等,則歐几里得幾何學(Euklidische Geometrie)不能對於各座標系皆眞故也. 然不用幾何學而欲敍述自然定律,猶不用言語而欲敍述思想,皆爲不可能之事. 故吾人不得不先求可以裝載吾人思想之言語. 此種言語,將向何處尋乎?

荏苒五年,此問題猶未解決. 至一九一二年,余始思及開此祕扃之鑰,卽在高斯(Gauss)曲面論之掌握中. 高斯座標(Gaussische Koordinaten)含義之深遠,余在學生時代雖亦曾聞數學先生該撒(Geiser)氏言之,然余當時所得之印象未如此時之著明也. 然此時余亦不過回憶昔年聞之於師者,悟及幾何學之基礎應含有物理學之意義而已. 至於黎曼(Riemann)之卓識高論,余猶未之聞也.

余自勃拉格(Prag)再歸居里許(Zürich)時,余之愛友大數學家格羅斯曼(Marcel Grossmann)亦在其地. 當余在伯倫特許局時,每因調查數學論文深感不便,常得此君之力. 余歸居里許後,與君相遇,始知有里奇(Ricci),繼而知有黎

其根柢之所在,然竟未能達余之目的也. 且惰性(Inertia)與能(Energie)之關係,由特別相對論,已足解釋無遺,而重量(Gewicht)與能之關係,換言之,即引力場(Gravitationsfeld)與能之關係,則全在五里霧中;尤爲余所深憾. 然此問題終非特別相對論所能解決,余當時已直覺之矣.

一日,余坐於伯倫特許局之一室中,忽自思曰:

"若一人從高處墜下,則其人未及地時,必不覺其身之有重量."

此思想雖極簡單,而印象則極深刻. 余後日得漸進而至於萬有引力論之勝境者皆此思想嚮導之力也. 余於是復自思曰:

"人墜下時有加速度. 其人判斷一切現象所用之座標系亦爲有加速度之座標系."

由此,余遂決心將有加速度之座標系亦納於相對原理中,建設一普遍的相對論. 以爲此理論一旦成就,則引力問題亦可同時解決. 何則,墜下之人所以不覺其身重者,吾人可視之爲地球引力之外尙有一新引力場與之相殺. 是有加速度之座標系必有引力場,明也.

然此不過余之思想之第一程耳. 余之問題實尙未完全解決. 其後又經八年,始得具體的關係. 惟建設此等關係之普遍的基礎,

別相對論。特別相對論之思想,即自哲學的見地觀之,亦無不當之處。余當時再三思維,余之見解與馬赫(Mach)之見解實若合符節也。馬赫以其銳利之論鋒,將科學中之多數根本觀念解析明白以後,喚起吾人之反省者不少。余後日由普遍相對論解釋之諸觀念,皆直接與其論證有關。惟特別相對論之時間觀念,不過間接受其影響而已。

余自動體之光學問題至特別相對論,所經之途程大抵如此。

余欲建設普遍相對論之思想,發端於特別相對論誕生後二年,即一九〇七年。此念起時眉目已極分明,不似特別相對論思想初起時之模糊也。

相對原理惟限於等速度運動,不及於加速度運動,此決非吾人之理性所能滿足者。余思除去此限制之心,蓄之已非一日。忽忽至一九〇七年,斯塔克(Stark)氏囑余爲放射能學與電子學年報(Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik)作一長文,詳述特別相對論之原理,並網羅其一切推論。[1] 余草此文時,始知一切自然定律皆可以特別相對論論之,惟萬有引力定律,則非此所能馭。余因以爲怪,亟欲尋

(1) 譯者註: 本書即此文之全譯。

威爾(Maxwell)羅倫慈之電力學方程式爲金科玉律,決無容疑之餘地也。然此等方程式若對於運動座標系亦能成立,則光速度不因座標系之運動而變;如是,則吾人由牛頓力學習得之速度加法定理,卽不復能自存。二者之間,何以有此兩不相容之性質乎?余於是不得不大惑矣。自是以來,余又竊思羅倫慈之思想或尙有不能不更正之缺點在。然冥索窮追,幾及一年,終不知何者爲是,何者爲非也。

其後余因偶得伯倫(Bern)一友人之助,余之希望始未卽至於絕。余往訪此友之日,天氣極佳,卽在今日,猶能記憶。余一見彼面,卽告之曰:

"余有一不能自解之問題,故今日特來訪君,請君有以教我."

於是余等各抒己見,議論至於數時之久,余始歸。余之悱憤終得啓發者,實此一場辨論之功也。余悟後之翌日,復往訪彼告之曰:

"余甚謝君,余之問題已解決矣."

所謂解決者非他,卽時間之觀念是。時間與光號速度(Geschwindigkeit des Lichtsignal)之間實有不可分離之關係,吾人以時間爲絕對的,誤也。以前所遭之困難卽由於此。

余悟及此後,不及五星期,遂造成今日之特

信之而未嘗有所疑也. 余潛思之,若設一鏡與地球運動之方向垂直,於鏡前設一光源,假使地球果在以太海中運動,則由此光源沿地球運動之方向射出之光,經鏡面反射後,其能(Energie)當與反射前之能有異. 若以二熱電堆 (Thermosäule) 試驗其前後所生之熱量,二者之間必不能無差. 如是,則地球之運動不將由此可以查出耶?余之用意雖與邁克爾生(Michelson)之實驗相彷彿,然邁克爾生之實驗,余當時尙未深知也. 及余得知邁克爾生之實驗僅得一不可思議之負結果,余始悟吾人以爲地球在以太中運動之思想,實乃大謬. 余之特別相對論亦遂於此時萌芽矣. 自是以來,余深信地球雖繞日轉,然其運動決非地球上之光學實驗所能測也.

適於此時,余卽得讀羅倫慈(H. A. Lorentz)一八九五年發表之論文. 由此論文,余始知運動體之速度與光速度之比之自乘,若可以略而不論,則在此範圍內,電力學問題皆可以羅氏之理論完全解決. 余於是思及費左(Fizeau)之實驗,以爲吾人若假定羅氏之方程式不獨對於眞空中之座標系可以成立,卽對於運動體上之座標系亦可以成立,則此問題或亦可以渙然冰釋. 要之,余在當時,實深信馬克思

附錄

相對論思想發展之歷程

1922年十二月十四日愛因斯坦

在日本西京帝國大學學生會講演

余從何處着想而創出今日之相對論?此問題實不易答. 蓋啓發人類思想之原因,大抵雜而不純,隱而不顯,且其啟發力亦各不相等故也. 余今亦不欲一一列舉此等原因,以勞諸君之聽. 卽余所著之論文,余亦不欲屈指細數. 今日余所欲爲諸君言者,不過余之思想發展之歷程大略而已.

余欲建設相對原理之思想發端於十七年前. 此思想何由而生,固有余亦不自知者,然動體光學之問題爲其最大之一因,殆無可疑也. 光在以太(Äther)海中航行,地球亦在能媒海中航行. 若自地球觀之,則地球之旁無時不有以太流過. 然遍察物理學之文叢,竟無一事實證明以太之流,斯亦奇矣. 因此,余亟欲得一實驗的方法以證明此能媒之流. 至於能媒之存在與地球之運動,余在當時則深

爲以同法測得之各單位體積內之電能與磁能，是可以 ϵ 表之。再由(30)式，

$$\frac{\delta}{\delta\sigma}=\left(1-\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)\frac{\delta}{\delta\tau},$$

故得

$$\int\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)\eta_\tau\,d\omega+\frac{d}{d\tau}\left\{\int\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)\epsilon\,d\omega\right\}=0$$

此方程式表能常存之原理，其所含之結果，非常重要，吾人不可不再三注意也。蓋吾人在各地測定能之量或能之增加量，雖各得$E=\epsilon d\omega$，或 $E=\eta d\omega d\tau$ 之值，然能之積分之中，於此等量之外，尙有與其位置相當之 $\frac{E}{c^2}\gamma\epsilon=\frac{E}{c^2}\Phi$。故在萬有引力場，無論何能 E，皆有一種位置之能隨之，而其值與質量等於 $\frac{E}{c^2}$ 之"重物"所有之位置能相等。

由§11推得之定律，E 之能與 $\frac{E}{c^2}$ 之質量相當。

故若吾人引入§17之假定，果能與自然適合，則此定律不獨對於惰性質量眞，即對於重力質量亦眞矣。

(終)

以理論之結果與經驗比較也.

今更依次以

$$\frac{X^*}{4\pi}, \;\cdots\cdots\cdots\cdots\; \frac{N^*}{4\pi},$$

乘(31 a)與(32 a)之諸式,然後就無限空間,求其積分,則得

$$\int\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)^2\frac{\rho}{4\pi}(\mu_\xi X+\mu_\eta Y+\mu_\zeta Z)\,d\omega$$

$$+\int\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)^2\frac{1}{8\pi}\;\frac{\delta}{\delta\sigma}(X^2+Y^2+Z^2+L^2+M^2+N^2)\,d\omega=0$$

式中之

$$\frac{\rho}{4\pi}(u_\xi X+\mu_\eta Y+\mu_\zeta Z)$$

表物質之各單位體積於地方時 σ 之單位時間內所得之能(Energie)。 惟其能之值,係以在其位置之器具測定者,以 η_σ 表之,則由(30)式,得

$$\eta_\tau=\eta_\sigma\left(1-\frac{\gamma\xi}{c^2}\right),$$

是卽物質之各單位體積於 τ 之單位時間內所得之能,測定之法與前同. 又

$$\frac{1}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2+L^2+M^2+N^2)$$

$$(31\ b)\quad -\frac{1}{c\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)}\left(\rho^* w_\xi+\frac{\delta X^*}{\delta\tau}\right)=\frac{\delta N^*}{\delta\eta}-\frac{\delta M^*}{\delta\zeta}\ 等$$

及

$$(32\ b)\quad \frac{1}{c\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)}\frac{\delta L^*}{\delta\tau}=\frac{\delta Y^*}{\delta\zeta}-\frac{\delta Z^*}{\delta\eta}\ 等$$

以此等方程式,與無萬有引力之空間之電磁方程式比較,外形全同。惟在無萬有引力之空間,方程式中之 c,今則變爲

$$c\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)=c\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right)$$

由此可知光線若不沿 ξ 軸進行,則當因萬有引力場而彎曲。方向之變化,每隔光路一糎,等於

$$\frac{\gamma}{c^2}\sin\phi$$

ϕ 表引力方向與光線方向所成之角.

由此等方程式,與靜體光學表電磁場與電流關係之方程式,萬有引力場對於靜體之光學現象有何影響,立可尋得. 然由靜體光學得來之方程式,須用地方時 σ 始可。不幸地球引力之影響極微(因 $\frac{\gamma x}{c^2}$ 過小之故),吾人頗難

$$(32\,a)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\delta L^*}{\delta\sigma}=\dfrac{\delta Y^*}{\delta\zeta}-\dfrac{\delta Z^*}{\delta\eta}, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\delta M^*}{\delta\sigma}=\dfrac{\delta Z^*}{\delta\xi}-\dfrac{\delta X^*}{\delta\zeta}, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\delta N^*}{\delta\sigma}=\dfrac{\delta X^*}{\delta\eta}-\dfrac{\delta Y^*}{\delta\zeta}. \end{cases}$$

由此等方程式,吾人卽可得知萬有引力場對於平衡的常定的現象,有何影響. 所謂影響云者,卽無萬有引力場時,電磁分場爲 X 等,有萬有引力場時,則變爲 $X\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)$ 等,又 ρ 亦變爲 $\rho\left(1+\frac{\delta\xi}{c^2}\right)$ 是也. 至於電磁方程式之外形,則無以異.

若欲一覽非常定狀態之經過,吾人當用時間 τ 以表對於時間微分之諸項及電氣速度之定義,由(30)式,令

$$\frac{\delta}{\delta\tau}=\left(1+\frac{\delta\xi}{c^2}\right)\frac{\delta}{\delta\sigma},$$

及

$$w_\xi=\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right).\mu_\xi,$$

則得

$$\frac{1}{c}\left(\rho\mu_\zeta+\frac{\delta Z}{\delta\sigma}-\frac{\gamma}{c}M\right)=\frac{\delta M}{\delta\xi}-\frac{\delta L}{\delta\eta}\ ,$$

$$\frac{1}{c}\ \frac{\delta L}{\delta\sigma}=\frac{\delta Y}{\delta\zeta}-\frac{\delta Z}{\delta\eta}\ ,$$

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\delta M}{\delta\sigma}-\frac{\gamma}{c}Z\right)=\frac{\delta Z}{\delta\xi}-\frac{\delta X}{\delta\zeta}\ ,$$

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\delta N}{\delta\sigma}+\frac{\gamma}{c}Y\right)=\frac{\delta X}{\delta\eta}-\frac{\delta Y}{\delta\xi}\ .$$

以$\left(1+\frac{\delta\xi}{c^2}\right)$乘此等方程式,且令

$$X^*=X\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right),$$

$$Y^*=Y\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)\quad 等$$

$$\rho^*=\ \rho\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)$$

略去 γ 之第二次項,則得下式:

$$(31\ a)\quad\begin{cases}\frac{1}{c}\left(\rho^*\mu_\xi+\frac{\delta X^*}{\delta\sigma}\right)=\frac{\delta N^*}{\delta\eta}-\frac{\delta M^*}{\delta\zeta}\ ,\\ \frac{1}{c}\left(\rho^*\mu_\eta+\frac{\delta Y^*}{\delta\sigma}\right)=\frac{\delta L^*}{\delta\zeta}-\frac{\delta N^*}{\delta\xi}\ ,\\ \frac{1}{c}\left(\rho^*\mu_\zeta+\frac{\delta Z^*}{\delta\sigma}\right)=\frac{\delta M^*}{\delta\xi}-\frac{\delta L^*}{\delta\eta}\ .\end{cases}$$

僅限於 S' 與 Σ 相對靜止之極短時間,[1] 則比較 S' 系而得之 ρ', μ', X', L' 等量,與比較 Σ 系而得之 ρ, μ, X, L 等量,可以視爲相等. 又 t' 亦不能不改爲地方時 σ, 然吾人不能直書

$$\frac{\delta}{\delta t'}=\frac{\delta}{\delta\sigma}$$

何則,變爲 Σ 系之方程式所表之點,雖對於 Σ 系靜止不動,然此點在 $dt'=d\sigma$ 之短時間內,對於 S' 系之速度已不復如初,而其速度之變化,由 (7a) 與 (7b) 式,乃與電磁分場對於 Σ 系之時間的變化相當故也. 故吾人當令

$$\frac{\delta X'}{\delta t'}=\frac{\delta X}{\delta\sigma}, \qquad \frac{\delta L'}{\delta t'}=\frac{\delta L}{\delta\sigma},$$

$$\frac{\delta Y'}{\delta t'}=\frac{\delta Y}{\delta\sigma}+\frac{\gamma}{c}N, \qquad \frac{\delta M'}{\delta t'}=\frac{\delta M}{\delta\sigma}-\frac{\gamma}{c}Z,$$

$$\frac{\delta Z'}{\delta t'}=\frac{\delta Z}{\delta\sigma}-\frac{\gamma}{c}M. \qquad \frac{\delta N'}{\delta t'}=\frac{\delta N}{\delta\sigma}+\frac{\gamma}{c}Y.$$

如是,則以 Σ 系爲比較體,當得電磁方程式如下:

$$\frac{1}{c}\left(\rho\mu_\xi+\frac{\delta X}{\delta\sigma}\right)=\frac{\delta N}{\delta\eta}-\frac{\delta M}{\delta\zeta},$$

$$\frac{1}{c}\left(\rho\mu_\eta+\frac{\delta Y}{\delta\sigma}+\frac{\gamma}{c}N\right)=\frac{\delta L}{\delta\zeta}-\frac{\delta N}{\delta\xi},$$

(1) 此制限決不影響於吾人所得結果之適用範圍. 何則,自然定律,不能因時而異故也.

之時鐘,當較座標原點之時鐘速$\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right)$倍. 由此義言之,時鐘本身所起之現象——推而廣之,一切物理學的現象——其發生地之萬有引力勢愈大,則進行愈速.

在種種勢(Potential)不相等之萬有引力場中,能順應極精之時鐘,自然界中實有其物,即分光線(Spektrallinie)之發生體是也. 此等物質在太陽面上時所發之光,較之在地球面上時所發之光,其波長(Wellenlänge)當大百萬分之二.[1]

§20. 萬有引力對於電磁現象之影響.

設想一無加速度之關係系S',對於以上所述之有加速度關係系Σ,在一瞬間靜止不動,而吾人研究某一時點之電磁現象,即以S'為比較體,則由(5)與(6),得

$$\frac{1}{c}\left(\rho'\mu'_x+\frac{\delta X'}{\delta t'}\right)=\frac{\delta N'}{\delta y'}-\frac{\delta M'}{\delta z'} \text{ 等}$$

及

$$\frac{1}{c}\frac{\delta L'}{\delta t'}=\frac{\delta Y'}{\delta z'}-\frac{\delta Z'}{\delta y'} \text{ 等}$$

方程式. 由以上所述之理由,若吾人之考察,

(1) 假定(30 a)式對於不均等之萬有引力場亦能適用.

測定地方時用之時鐘在,故在引力場內之一地,測定物理學量時,亦不能不用地方時 σ.

然吾人所研究之現象,若與種種引力勢不等之各地所起之現象皆有關係,吾人研究此一現象,卽不得不同時考察各地所起之現象.

如是,則時間不僅隱存於物理學量之定義中,且明現於其定義外時,其項中之時間,卽非用 τ 表之不可. 否則二事之同時性,卽非同値之時刻所能表也. 吾人定時間 τ 之意義時,大抵不用任意選出之一時點,僅用任意選出之一地所有之時鐘,故吾人卽用時間 τ, 自然定律亦不因時而異,不過或因地而異而已.

§19. 萬有引力場對於時鐘之影響.

假定萬有引力勢等於 Φ 之一點 P, 有一時鐘表地方時 σ, 則由 (30a) 式,其所示之數 σ, 當較時間 τ 大$\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right)$倍. 換言之,設座標原點有一時鐘與此時鐘之構造全同,則後者之進行,當較前者速也. 設想空間之某處有一觀察者,以某方法(例如光學的方法),得知此二鐘所指之數。吾因自一時鐘所示之時刻,至觀察者得識其所示數之時刻,其間所歷之時間 $\Delta\tau$, 與 τ 毫無關係,故對於空間某處之觀察者, P 點

一定界限,則(30)式卽不復有效. 因座標原點之選擇,於其關係毫無影響,故吾人卽由此理,(30)式當變爲

$$\sigma=\tau e^{\frac{\gamma\xi}{c^2}}$$

始爲精確. 是雖爲論理上當然之結果,然吾人仍以用(30)式爲便.

由§17. 所述之假定,(30)式亦可用於在均等引力場下之關係系. 以 Φ 表引力之勢(Gravitationspotential), 則 $\Phi=\gamma\xi$,故

$$(30a)\qquad \sigma=\tau\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right)$$

吾人旣對於 Σ 系,下有兩種時間之定義,則吾人何時宜用其一種,何時又宜用其他一種乎? 今試假定引力勢不相等之二地,各有一物理系,而比較其物理學量. 欲行此事,最自然之程序,莫如以下所述. 卽先以吾人之測定器具,置之於第一物理系內,實行吾人所欲行之測定. 然後移其器具與觀察之人於第二物理系內,再行吾人在第一物理系內所行之測定. 若在第二系內測得之結果,與在第一系內測得者同,則吾人可名此二系爲"相等"之物理系. 因上述測定器具之中,不能不有

$$t_1-\frac{v}{c^2}x_1=t_2-\frac{v}{c^2}x_2,$$

則由方程式(1)之第一式,二事之發生,對於S'系爲同時,卽對於Σ系爲同時. 假定吾人之研究,惟限於極短時間,τ及v之二次以上之項,皆可棄而不論,[1] 則由(1)式與(29)式,

$$x_2-x_1=x'_2-x'_1=\xi_2-\xi_1,$$

$$t_1=\sigma_1, \qquad t_2=\sigma_2,$$

$$v=\gamma t=\gamma\tau.$$

故由上方程式,

$$\sigma_2-\sigma_1=\frac{\gamma\tau}{c^2}(\xi_2-\xi_1)$$

若第一點現象發生於座標原點,則

$$\sigma_1=\tau, \qquad 及 \qquad \xi_1=0$$

故刪去第二點現象之附數,卽得以下之公式:

$$(30) \qquad \sigma=\tau\left(1+\frac{\gamma\xi}{c^2}\right)$$

τ與ξ之值在一定界限以下時,此式確能成立,自不待言. 若Σ之加速度γ一定,則σ與τ之關係當爲一次的,故加速度一定時,無論τ之值爲何,此式亦能成立. 然ξ之值若超過

(1) 以此之故,由(1)對於$\xi=x'$之值,假定有一種制限.

分空間用相同之時鐘,並用相同之測定法,則自然現象之定律,與其部分空間之位置無關,換言之,即不因其座標之值而異.

然吾人不得簡稱地方時 σ 爲 Σ 系之"時間"也. 何則,設有二事發生於 Σ 系中不同二點,縱令其地方時相等,然由吾人上述之定義,其二事之發生,亦不得謂爲同時. 蓋 Σ 系中任何二時鐘,於 S 系之 $t=0$ 時,適相符合,且其運動亦相等,故對於 S 系,二者無時不相合,然因此之故,由 §4 所得之結果,二時鐘對於以一定速度對 S 系運動之 S' 系,即不能亦適相合,明矣. 然 S' 系雖以一定速度對 S 系運動,然對於 Σ 系,則暫時適在靜止狀態. 故由上吾人所述之定義,二時鐘對於 S' 系不相合,即對於 Σ 系不相合也.

吾人於此,可以下一定義曰:設一時鐘在 Σ 系之座標原點,恰與吾人欲定其發生時刻之現象爲同時,而其同時之意義,完全如以上所述,則吾人謂其時鐘所報之時刻,爲 Σ 系之"時刻" τ.(1)

今更進而求一點現象之時刻 τ 與地方時 σ 之關係. 二點現象發生之時刻及其所在位置之座標,各以附數 1 及 2 表之. 若

(1) 以此之故, τ 之符號與以上用此符號時所表之意義不同.

之進行當爲何如，則尙待研究也。

吾人第一須記憶者，加速度對於 Σ 時鐘之進行，雖不無影響，然實可以略而不論，蓋其影響之程度，必與 γ^2 相比例故也。不寧惟是，τ 時之間，Σ 系所得之速度，對於其時鐘之影響，及此時鐘於 τ 時之間，對於 S' 系之時鐘所經之路程，亦可視爲與 0 相等。Σ 系時鐘對於 S' 系時鐘所經之路程，所以可視爲 0 者，亦因其程度與 τ^2 相比例故也。故在極短時間 τ 內，Σ 時鐘之指示，卽以 S' 時鐘之指示代之，亦相差不甚遠。

由以上所述之理由，若吾人設想一關係系 S'，在一瞬之間對於關係系 Σ 靜止不動，卽依據 S' 系，規定同時之意義，且用無加速度關係系測量時間與空間之鐘與尺，以測量時間與空間，則在極短時間 τ 內，光在眞空中傳布之速度，亦爲普遍恆數 c。故光路極小時，光速度一定之原理，仍可用爲同時之定義。

今試想吾人以上述方法，整理 Σ 系之時鐘，使其於 Σ 系對於 S 系靜止時，卽 S 系之 $t=0$ 時，適與 S 系之時鐘相合。Σ 系之時鐘經此整理後，其所示時刻，可名曰"地方時" σ。地方時之物理的意義如下：卽吾人若以地方時 σ 表 Σ 系之各小部分空間之現象，且在各小部

必爲 γ 之偶數次之函數. 故若 γ 甚小,其二次以上之項皆可略去不論,則物體之伸長,亦可視爲全等於0. 以下所論者,皆以此爲限;如是,則加速度對於物體形狀之影響,可以不必更加考察矣.

試想一關係系 Σ,對於無加速度之關係系 S,以等加速度沿 X 軸之方向運動. 假定 Σ 系對於 S 系靜止不動時,其鐘之遲速與尺之長短,與 S 系之鐘與尺完全一致. 又假定 Σ 系之座標原點,沿 S 系之 X 軸運動,而 Σ 系之座標軸,時時與 S 系之座標軸平行. 如是,則吾人常可想像無論何時,皆有一無加速度之關係系 S' 存在,其座標軸在其一瞬間(S' 系之某一定時 t')與 Σ 之座標軸完全相合. 設想於此時 t',有一點現象發生,其對於 Σ 之座標爲 ξ, η, ζ, 則

$$x'=\xi, \qquad y'=\eta, \qquad z'=\zeta$$

何則,由以上所述之理,吾人測定 ξ, η, ζ 時所用之標準物體,雖因受加速度之影響而變形,然其影響可以略而不論故也。 又 t' 雖爲 S' 系之一定時,然吾人亦能豫整 Σ 系之時鐘,使其於此一定時所指之數,適與 S' 系所指之 t' 相等. 惟自此時以後,更經極短時間 τ,時鐘

自吾人今日所有經驗之立脚地觀之,吾人實無理由,假定 Σ_1 與 Σ_2 二系不爲同等. 於此,吾人可以設一假定曰:萬有引力場與相當關係系之加速度,在物理學上皆有完全相等之價值. 吾人今後之理論,卽以此假定爲基礎.

以上所設之假定,不過將吾人用等速度運動之關係系時所假定之相對原理,推廣於等加速度運動之關係系而已. 此假定之價值,在能使吾人以等加速度運動之關係系,代均等之萬有引力場. 吾人之理論所以能向前進行者,實由此也.

§18. 等加速度運動系之空間與時間.

設想有一物體,其各質點對於無加速度之關係系 S, 在某一定時 t, 速度全等於 0, 然各質點之加速度則不等於 0. 命各質點對於 S 系之加速度皆等於 γ, 則物體對於 S 系之形狀,因此加速度 γ 而生何影響乎?

若有影響發生,則其影響必發而爲加速度方向之伸長,或爲垂直於加速度之二方向之伸長,而其伸長之程度,必可以某一定比表之. 何則,蓋由對稱之理由,不與此同類之他種影響,皆不能存在故也. 又物體以加速度運動時,不伸長則已,苟有此種影響發生,則其伸長

第五章

相對原理與萬有引力

§17. 有加速度之關係系與萬有引力場.

自然定律,與關係系之運動狀態無關;是乃相對原理之普遍形式. 然吾人以前應用此假定時,所設之關係系皆無加速度. 若關係系有加速度,相對原理猶能成立否乎? 吾人尙未可輕易下一斷語也.

余今雖未能徹底討論此問題,然無論何人,一讀前數章所述相對原理之種種應用以後,其心中未有不自然發生此問題者;故余亦不得不將余之意見,爲讀余文者陳之. 試想有二運動系 Σ_1 及 Σ_2. Σ_1 以加速度 γ 沿 X 軸之方向運動,而其加速度 γ 不因時而變. Σ_2 則靜止不動,然時時皆居於均等之萬有引力場中;而因此萬有引力場之故,一切物體皆以 $-\gamma$ 之加速度沿 X 軸之方向運動.

在吾人經驗所知之範圍內,吾人由 Σ_1 系觀察自然而得之物理定律,與由 Σ_2 系觀察得來者,實無毫釐之差也. 其所以如是者,實爲一切物體在萬有引場中皆有同加速度故. 故

式,亦卽蒲郎克用以爲根據者也. 故吾人之研究與蒲郎克之研究,實殊途而同歸.

系所受之力不一,而其合力之座標分爲 F_x, F_y, F_z,若其系之狀態,可以可逆行的歷程,及 q, V, T 等變數決定之,則吾人所用之原理,卽可以下公式表之:

$$(28)\qquad dE = F_x dx + F_y dy + F_z dz - p dV + T d\eta,$$

$$(29)\qquad F_x = \frac{dG_x}{dt} \quad 等.$$

又

$$F_x dx = F_x \dot{x} dt = \dot{x} dG_x = d(\dot{x} G_x) - G_x d\dot{x} \ 等$$

及

$$T d\eta = d(T\eta) - \eta dT$$

由此等關係式,則得

$$d(-E + T\eta + qG) = G_x d\dot{x} + G_y d\dot{y} + G_z d\dot{z} + p dV + \eta dT$$

此式之左邊爲完全微分,右邊亦不能不爲完全微分,由此關係與(29)式,吾人立可推得以下之諸式:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta H}{\delta \dot{x}}\right) = F_x, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta H}{\delta \dot{y}}\right) = F_y, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta H}{\delta \dot{z}}\right) = F_z,$$

$$\frac{\delta H}{\delta V} = p, \qquad \frac{\delta H}{\delta T} = \eta.$$

然此等關係,卽由最小作用原理推出之方程

$$dQ=\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}\cdot(dE_0+p_0dV_0)$$

卽

$$(26)\qquad dQ=dQ_0\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}\cdot$$

再由(24)可得

$$dQ\ =Td\eta,$$
$$dQ_0=Td\eta_0$$

兩式,故結局由(25)及(26)而得

$$\frac{T_0}{T}=\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}$$

卽凡對於一運動系有運動關係者其溫度必小於對之爲靜止之關係系之溫度.

§16. 物理系之力學與最小作用原理.

吾人以上所得之關係,與蒲郞克"論運動系之力學"文中所推之結果,雖若合符節,然蒲郞克之推論,係根據最小作用之原理(與空洞輻射之壓力及溫度之變換方程式)而來. 蒲郞克之硏究與吾人上述之硏究,根本上有何聯絡,是亦一重要問題也. 吾人上述之硏究,發端於能之原理與動量常存之原理. 設物理

是也．今將蒲郎克論文之一節,轉錄於下．

"設想一物體,初靜止於無標系上,其後經過可逆行的斷熱的變化,而靜止於有標系上．設物體在第一狀態時,其對於無標系之熱率爲η_1,在第二狀態時其對於無標系之熱率爲η_2,因其變化可以逆行,且變化中無熱出入,故$\eta_1=\eta_2$．然此現象對於有標系亦爲可逆行的,且爲斷熱的,故$\eta'_1=\eta'_2$".

"若η'_1與η_1不相等,而$\eta'_1>\eta_1$,則吾人將得以下之結果:物體之熱率對於運動關係系大,對於靜止關係系小。若然,則由此定律,$\eta_2>\eta'_2$之不等式亦不能不成立。何則,物體在第二狀態時,對於有標系靜止不動,對於無標系則運動不止故也．然此二不等式與前所推得之二等式實不能相容。故$\eta'_1>\eta_1$亦不能成立。

故$\eta'_1=\eta_1$,以普遍之形式表之,卽$\eta'=\eta$．以言語表之,卽物體之熱率與座標系之選擇無關。"

若將蒲郎克所用之記號,改爲吾人所用之記號,則得

$$(25)\qquad \eta=\eta_0$$

更由(16c),(18c),(20)及(22)等式,引入E_0, p_0, V_0等量於(23)式之右邊,則

nische Arbeit)之間,不必特設分界也。今試引入熱學的量而論之。

假設一運動系之狀態,可以 q, V, E 等量,完全決定。今若以熱量 dQ 授與此種物理系,則其一部分當等於全體之能之增加量,一部分當等於壓力所作之功,一部分當等於增加該系之動量所費之功。故得下方程式:

$$(23)\qquad dQ=dE+pdV-qdG$$

是爲所與熱量對於運動系之定義。吾人有此定義以後,卽可考察一可逆行的輪迴歷程(umkehrbarer Kreisprozess),引入運動系之絕對溫度 T 與熱率(Entropie) η; 其方法與普通熱力學書同。如是,則得下方程式:

$$(24)\qquad dQ=Td\eta$$

設想吾人以隨其物理系運動之關係系爲標準,測定與上述諸量 dQ, η, T 相當之 dQ_0, η_0, T_0, 則前者與後者間之關係有何方程式足以表出之乎?此實吾人今欲解決之問題也。對於熱率,已有蒲郎克之研究,[1] 足供吾人之用;惟須注意者,蒲郎克論文中所謂"有標系"卽吾人之 S' 關係系,所謂"無標系"卽吾人之 S 關係系

(1) M. Planck, Zur Dynamik bewegter Systeme. Sitzungsber. d. Kgl. Preuss. Akad. d. Wissensch. 1907.

$$G=\frac{q}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\frac{\frac{4}{3}E_0}{c^2}.$$

吾人今更考察僅帶電氣而無質量之物體．若此物體不受外力之作用，則吾人可用(16a)及(18a)式．以 E_0 表隨行關係系所測之電能，則

$$E=\frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}},$$

$$G=\frac{q}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\frac{\frac{4}{3}E_0}{c^2}.$$

此值之中，一部分係由電磁場而生，其餘部分則由其所負電氣所施之力而生．[1]

§15．運動系之熱率(Entropie)及溫度．

決定一物理系之狀態，有種種變數，吾人以上所用者，爲壓力，體積，能，速度，動量，至於與熱相關之量，則未有一言及之．所以如是者，蓋對於一物理系之運動，無論其所得之能，爲何種類，結果皆同，故吾人於熱與力學的功(mecha-

(1) A. Einstein, Ann. d. Phys. [4], 23 (1907) 373.

試想吾人以上所設之物理系,純爲電磁的輻射,而其輻射全封閉於無質量之空洞中,器壁與輻射壓適成平衡。若其空洞不受外力之作用,則吾人可以應用 (16a) 及 (18a) 式於其全系(空洞體亦包括在內)。今以 E_0 表隨行座標系所測之輻射能,則

$$E=\frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}},$$

$$G=\frac{q}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}E_0=q\frac{E}{c^2}$$

若器壁完全能屈能伸,則內部之輻射壓當與系外物體及於此系之外力相抵,故吾人此時須用 (16c) 及 (18c) 式,而於此等式中,加入吾人所熟知之輻射壓之值:

$$p_0=\frac{1}{3}\frac{E_0}{c^2}$$

如是,則得

$$E=\frac{E_0\left(1+\frac{1}{3}\frac{E_0}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}},$$

一物理系之狀態時,即可不用由隨行關係系測得之 E_0, V_0, p_0, 而用動量 G, 速度 q, 與由同關係系測得之 E, V, p. 例如吾人上述之物理系之狀態,若對於隨其系運動之觀察者,可以二變數 V_0 及 E_0 完全定之,則其狀態方程式,當能作 p_0, V_0, E_0 之關係式解. 若然,則借上述方程式之助,其狀態方程式,亦可變為

$$\phi(q, p, V, E) = 0$$

之形式.

更將 (18c) 式變為與此相當之形式,則得

$$G = q\left(\mu + \frac{E + pV}{c^2}\right) \tag{18d}$$

由此方程式與表明動量常存之方程式

$$\frac{dG_x}{dt} = \Sigma K_x \text{ 等},$$

若吾人於 ΣK_x 等量之外,更知 E, p, V 為時間之何函數,與則系全體之並行運動,即可完全決定. 又吾人縱不知 E, p, V 為時間之何函數,然若能知有三量,可以推出其系之運動所由生之條件,則其三量與上述三函數同等,吾人由此三量,亦可完全決定其物理系之運動.

§14. 例.

式中之 l', m', n', 表法線之方向角,惟法線方向自物體之外向物體之內, S'_x, S'_y, S'_z 表部分面積 S' 之射影. 由方程式(2)

$$S'_x = S_x$$
$$S'_y = \beta \cdot S_y$$
$$S'_z = \beta \cdot S_z$$

三式中之 S_x, S_y, S_z 表部分面積對於 S 系之射影. 故此部分面積所受壓力對於 S 系之各分壓力, K_x, K_y, K_z 可以由此三方程式求得之.

即
$$K_x = K'_x = p' \cdot S'_x = p' \cdot S_x = p' \cdot S \cos l,$$
$$K_y = \frac{1}{\beta} K'_y = \frac{1}{\beta} p' S'_y = p' \cdot S_y = p' \cdot S \cos m,$$
$$K_z = \frac{1}{\beta} K'_z = \frac{1}{\beta} p' S'_z = p' \cdot S_z = p' \cdot S \cdot \cos n,$$

此等式中之 S 表其部分面對於 S 系之面積, l, m, n 表法線對於 S 系之方向角,法線對 S 系之方向,仍以自物體外向物體內時爲正. 由此等方程式,可知部分面積上之壓力對於隨行關係系爲 p' 時,對於他座標系亦爲 p'_0. 由此推論之結果,吾人得次之方程式:

$$(22) \qquad p = p_0$$

吾人既有 (16c), (20), (22) 之方程式,則決定

得力之變換方程式.[1]

設想電氣量 ϵ 對於 S' 靜止不動,由(12)式,此電氣量所受之力,當爲

$$K_x=\epsilon X, \qquad K'_x=\epsilon X',$$

$$K_y=\epsilon\left(Y-\frac{v}{c}N\right), \qquad K'_y=\epsilon Y',$$

$$K_z=\epsilon\left(Z+\frac{v}{c}M\right), \qquad K'_z=\epsilon Z',$$

由此等方程式與(7a)式,

$$(21)\begin{cases}K'_x=K_x,\\ K'_y=\beta K_y,\\ K'_z=\beta K_z,\end{cases}$$

故吾人若知對於隨行關係系之力爲何,卽可由此等方程式計算其力.

設想 S' 爲靜止於 S' 系之部分面積,p' 爲其所受之壓力,則其各分壓力當如下:

$$K'_x=p'S'\cos l'=p'S'_x,$$
$$K'_y=p'S'\cos m'=p'S'_y,$$
$$K'_z=p'S'\cos n'=p'S'_z,$$

(1) 吾人於前節之研究,假定吾人所考察之物理系與其周圍之間僅有純粹電磁的交互作用。然前節所得之結果決不因此假定而受制限也。

§13. 運動系之體積與壓力, 運動方程式.

吾人欲決定一物理系之狀態,須用E_0, p_0, V_0等量,而此等量則以隨其系運動之關係系定之,已如上所述矣. 然不用此等量,而用動量G,與由同關係系定義之相當量亦無不可. 惟欲研究此問題,須先研究吾人引入新關係系時,體積與壓力如何變化.

設一物體對於關係系S'靜止不動. 設V'爲其物體對於S'之體積,V爲其物體對於S之體積. 由(2)式,當得

$$\int dx\ dy\ dz=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\int dx'\cdot dy'\cdot dz',$$

卽

$$V=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot V'.$$

以V_0代上式中之V',又以q代上式中之v,則上式變爲

$$V=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot V_0 \tag{20}$$

是爲體積之變換方程式. 若更欲求壓力之變換方程式,則須先就一般之力研究其變換始可. 吾人於§8曾言,使物體運動之力,可以作用於電氣的質量之電磁場之力代之. 故吾人但能求得電磁場之力之變換方程式,卽

$$(16b)\qquad E=\left(\mu+\frac{E_0}{c^2}\right)\frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}-\frac{\frac{q^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\Sigma(\delta_0 K_{0\delta}),$$

$$(18b)\qquad G=\frac{q}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\left(\mu+\frac{E_0-\Sigma(\delta_0 K_{0\delta})}{c^2}\right)$$

式中之 $K_{0\delta}$ 表運動方向之分力;惟測此力時所用之關係系,係隨其系運動者. 又式中之 δ_0 表垂直於運動方向之平面與其力之作用點相隔之距離,所用之關係系亦與前同.

若外力與方向無關,且處處與其系之表面垂直,——吾人以下皆作如是假定——則上式變爲

$$(19)\qquad \Sigma(\delta_0 K_{0\delta})=-p_0 V_0$$

式中之 p_0 表力, V_0 表其系對於同時並進之關係系之體積. 此時 (16b) 與 (18b) 之二方程式變爲

$$(16c)\qquad E=\left(\mu+\frac{E_0}{c^2}\right)\frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}+\frac{\frac{q^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}p_0 V_0,$$

$$(18c)\qquad G=\frac{q}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\left(\mu+\frac{E_0+p_0 V_0}{c^2}\right).$$

積分之界限惟由加力點之位置而定。 今更將上述積分分爲三部分如下:

$$\int [\Sigma K_x'] dt' = \int_{\frac{t_1}{\beta}-\frac{v}{c^2}x'}^{\frac{t_1}{\beta}} + \int_{\frac{t_1}{\beta}}^{\frac{t_2}{\beta}} + \int_{\frac{t_2}{\beta}}^{\frac{t_2}{\beta}-\frac{vx'}{c}}$$

此等積分之中,第二積分之時間界限一定不變,故等於零。 若 K_x' 力變化無限速,則其餘二積分之值不能求。(1) 故其系之能與動量,亦非吾人所能知。 若此力在 $\frac{vx'}{c^2}$ 之時間內變化甚微,則吾人可得下式:

$$\int_{\frac{t_1}{\beta}-\frac{vx'}{c^2}}^{\frac{t_1}{\beta}} (\Sigma K_x')\, dt' = \Sigma K_x' \int_{\frac{t_1}{\beta}-\frac{vx'}{c^2}}^{\frac{t_1}{\beta}} dt' = \frac{v}{c^2}\Sigma x' K_x'$$

第三積分之值亦可如此計算,由此得

$$\int (\Sigma K_x')\, dt' = -\left(\frac{v}{c^2}\Sigma x' K_x'\right)$$

如是,則能與動量均不難由(16)與(18)兩式算出,卽

(1) 參考 A. Einstein, Ann. d. Phys. [4], 23 (1907) §2

以此代入上式,則得

$$(18a)\qquad G=\frac{q}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\left\{\mu+\frac{E_0}{c^2}\right\}$$

以此式與質點之動量方程式比較,不過前式之 μ 今則變爲 $\left(\mu+\frac{E_0}{c^2}\right)$ 而已.

今更求對於 S 靜止不動之物體之能與動量如下. 假定物體無時不受外力,則對於各時刻 t', 仍得

$$\Sigma K_x'=0,$$

然(16)式與(18)式中之積分

$$[\Sigma K_x']dt$$

則不等於零. 何則,此積分之界限不在 t' 之二定值間,乃在 t 之二定值間故也. 由方程式(1),

$$t=\beta\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right)$$

故對於 t' 言,積分之界限當爲

$$\frac{t_1}{\beta}-\frac{v}{c^2}x' \qquad 與 \qquad \frac{t_2}{\beta}-\frac{v}{c^2}x'$$

然 t_1 與 t_2 與 x', y', z' 無關,故對於 S' 言,時間

$$\Sigma K'_x=0$$

即時間積分之極限雖與 x' 有關,然物體在吾人所想像之變化前後,若不受外力,則(18)式之第二項等於零. 如是,則

$$dG_x=\beta\frac{v}{c^2}dE'$$

由此式可知一物理系若不受外力,則其動量僅爲二變數之函數,其一變數即其系對於並進關係系之能 E_0,他一變數即速度 q 是也. 故

$$\frac{\delta G}{\delta E_0}=\frac{\frac{q}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{q'}{c^2}}}$$

由此得

$$G=\frac{q}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\left(\frac{E_0}{c^2}+\psi(q)\right)$$

式中之 $\psi(q)$ 爲 q 之未知函數. 然此函數所表者即因速度而定之動量,故由(156)式,

$$\psi(q)=\frac{\mu q}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}$$

§12. 運動系之能與動量.

設想一物理系自由浮游於空間,且爲輻射不能透過之壁所被覆. 命 X_a, Y_a, Z_a 等爲外部電磁場之强度;其系之能與他系之能交易,即借此電磁場爲媒. 若應用(15)式所由來之理於此電磁場,則得

$$\frac{d}{dt}\left[\int\frac{1}{4\pi c}(Y_aN_a-Z_aM_a)\,d\omega\right]+\int\frac{\rho}{4\pi}\left(X_a+\frac{\mu_y}{c}N_a-\frac{\mu_z}{c}M_a\right)d\omega=0$$

假定動量常存之定律無論何時皆無例外. 如是,則此方程式之第二項中,對於被覆表面積分而得之部分,當爲 G_x 對於時間之微分係數,所謂 G_x 者,即 X 方向之分動量可由該系之瞬時狀態完全決定者也. 由變換方程式(1),(7),(8),及(9),可得下關係式.

$$\int dG=\beta\int\int\frac{\rho'}{4\pi}\left(X'_a+\frac{\mu'_y}{c}N'_a-\frac{\mu'_z}{c}M'_a\right)d\omega'dt'$$

$$+\frac{\beta v}{c^2}\int\int\frac{\rho'}{4\pi}(X_a\mu'_x+Y_a\mu'_y+Z_a\mu'_z)\,d\omega dt'$$

即

$$(18)\qquad dG_x=\beta\frac{v}{c^2}dE'+\beta\int\left\{\Sigma K'_x\right\}dt'$$

若物體對於 S' 系靜止不動,則

$$\frac{M-\Sigma m}{M}=\frac{12\times10^{-6}\times2600}{250}=0.00012$$

故若吾人所定鐳之壽命無甚大差,則須先將其原子量精測至第五位數,始能試驗上述關係能否成立,此實不可得也. 雖然,放射現象之中,或亦有原子質量變爲放射能之率數,遠過於鐳者. 且原子崩解之速度,常因物質而異,其因崩解而生之能量,亦未必不因物質而異也.

以上所述質量之變化,雖未言明如何測量,然吾人意中實已假定常用之天秤爲其工具,詳言之,

$$M=\mu+\frac{E_0}{c^2}$$

之關係式,不惟表惰性質量與能之關係,且表重力質量與能之關係;蓋一系之惰性與重量,無論在何種境地,皆爲正比例者也. 故由此假定,則封閉於空洞中之輻射線,不惟有惰性,且亦當有重量,明矣. 惰性質量與重力質量常相比例之原理,徵之既往之實驗,毫無容疑之餘地. 故吾人若無事實以證其不然,卽假定其無往不合,不爲過也. 吾人於此論文之末章,尙可得見一新說以擁護此假定焉.

氏曾論之如下. 依卜勒昔特[1]之計算,若以一克原子之鐳(Radium)藏於極厚之鉛包中,則每時間放出之能等於

$$134.4\times225=30240 \text{ 卡路里}$$

由(17)式,則每時間內減少之質量當等於

$$\frac{30240\times419\times10^5}{9\times10^{20}}\text{克}=1.41\times10^{-6}\text{ 瓩}$$

故一年間減少之質量當等於 0.012 瓩. 然鐳之原子量甚大,此量恐非實驗所能測. 於是吾人不得不別尋一間接的方法矣. 今以崩解原子之原子量為 M, 以崩解後各變成物之質量為 m_1, m_2, 等等,則

$$M-\Sigma m=\frac{E}{c^2}$$

式中之 E 表一克原子崩解時放出之能. 崩解之情況一定時,若吾人能知其每單位時間放出之能,與原子之平均崩解時間,則 E 之值即可算出. 用此方法果能奏效與否,第一須視 $\frac{M-\Sigma m}{M}$ 較 1 不甚小之放射作用存在與否始可決定. 若用鐳,假定其壽命為 2600 年,則

(1) J. Precht, Ann. d. Phys. [4], 21 (1906), 599.

以此式與(14)式中所含質點之動能之式比較，兩式實有同形。故就能與運動速度之關係言之，此物理系無異於質量等於 M 之質點，而其 M 與其能 E_0 之間常有

$$(17) \qquad M=\mu+\frac{E_0}{c^2}$$

之關係。此結果在理論上，含義至深，不容輕視。何則，於此式中，物理系之能與其惰性質量皆為同種之物故也。故就惰性言，μ 之質量與 μc^2 之能內容恆等。且 E_0 之零點本非一定，其系之眞質量與皮相質量亦莫由能分。吾人與其強為分別，毋寧卽以惰性質量作能之儲積解，尤為自然也。

由以上所述之結果，則質量不變之定律，若僅就一物理系言，惟其能一定時始眞。當此之時，質量不變之定律與能之原理所陳之義皆同。然在吾人所知之一切物理現象中，物理系之質量變化極微，不可測度。例如放出 1000 卡路里 (Calorie) 之物理系，其質量不過減少 4.6×10^{-11} 克，由此可以想矣。

然放射性物質崩解之際，常散失多量之能，其時質量之減少必有可觀者。此事蒲郎克

由此方程式,吾人可以得一斷論曰:若一物理系不受外力,而以等速度運動,則其所有之能爲二變數之函數,所謂二變數:一爲其系對於隨行座標系[1] S' 之能 E_t,一爲其系之速度 q 是也。 吾人由此得

$$\frac{\delta E}{\delta E_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}$$

故

$$E=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}E_0+\phi(q)$$

$\phi(q)$ 爲 q 之函數,然非吾人所豫知者也。 若 E_0 等於 0, 則運動系之能,僅爲速度之函數;此時之値,吾人已於第八節與第九節詳論之矣。 故由(14)式,當得

$$\phi(q)=\frac{\mu c^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}+\text{恆數}$$

以此代入上式,除去積分恆數,則得

$$(16a)\qquad E=\left(\mu+\frac{E_0}{c^2}\right)\frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}$$

(1) 以下凡關係系對於所設物理系不動時,由其關係系觀察之量,皆以下方附有指標 0 之字母表之。 故以下應用 E' 之處,皆改爲 E_0.

$$\int dE=\beta\int\int\frac{\rho'}{4\pi}(\mu'_x X'_a+\nu'_y Y'_a+\mu'_z Z'_a)\,d\omega' dt'$$

$$+\beta v\int\int\frac{\rho'}{4\pi}\left(X'_a+\frac{\mu'_y}{c}N'_a-\frac{\nu'_z}{c}M_a\right)d\omega' dt'$$

然能之原理對於 S' 系亦不能不成立,故此式尚可改爲

$$(16)\qquad dE=\beta dE'+\beta v\int[\Sigma K'_x]dt'$$

今假定上述之物理系以等速度運動,換言之,卽物理系全體對於 S' 系不動。應用上方程式於此例,吾人可以得一重要結果。若其系之各部分對於 S' 運動極緩,其相對速度之二乘與 c^2 之比可以略而不論,則在 S' 系,吾人可以用牛頓力學。故由重心之定律,惟有 $\Sigma K'_x=0$ 時,此系(以精嚴之語言之,須云此系之重心)始對於 S' 系不動。然卽在此例,(16)式右邊之第二項亦未必卽等於零。何則,時間的積分,非在 t' 之二定限間,而在 t 之二定限間故也。

雖然,若在一定時間之始與終,此物理系均未受外力,則其項卽歸於烏有。此時(16)式卽成

$$dE=\beta dE'.$$

第四章

物理系之運動學及熱力學

§11. 論質量與能之關係.

設想一輻射不能透過之被覆中藏有一物理系. 并設想此系自由浮游於空間之中,只受周圍空間之電氣力與磁氣力,而無其他之力. 此等作用能傳功 (Arbeit) 或熱於其系,使其所有之能 (Energie) 增大,而此能又能在其系內變形. 由(13),此系所得之能,自 S 系觀之,當如下式:

$$\int dE=\int dt\int\frac{\rho}{4\pi}(X_a\mathfrak{v}_x+Y_a\mu_y+Z_a\mathfrak{v}_z)\,d\omega,$$

式中之 X_a, Y_a, Z_a, 表系外之電場有向量,系內之電場有向量不在其內, $\frac{\rho}{4\pi}$ 表其被覆中之電氣密度. 倒用(7a),(8)及(9)諸式以轉換此式,且注意於以下之函數行列式

$$\frac{D(x',y',z',t')}{D(x,y,z,t)}$$

由(1)式當等於1, 則得

則,且超出考甫曼之實驗誤差範圍以外. 吾人於此尚不能無疑也. 然蒲郎克[1]曾以他種方法另行計算,所得結果仍與考甫曼所得者相同. 考甫曼計算之無誤由此可見. 此規則的誤差果由未知之誤差原因而起者耶,抑由相對原理之基礎與事實不能適合而起者耶? 欲下一正當之斷語,恐尚須俟實驗材料累積後始能也.

余書至此,尚有不能已於言者,即由亞伯拉罕[2] (Abraham)與布黑勒爾[3] (Bucherer)之電子運動論計算之曲線,較之由相對原理算得者,反能與觀測之曲線相符是也.

然余以爲二氏之理論可疑之點甚多. 其關於運動電子之質量之根本假定,實與包容大多數現象而成之理論相去極遠. 若僅執此一事而遽判二者之是非,誤矣.

(1) M. Planck, Verhandl. d. Deutchen Phys. Ges. 8, (1906); 9 (1907).

(2) M. Abraham, Göttingen. Nachtr, 1902.

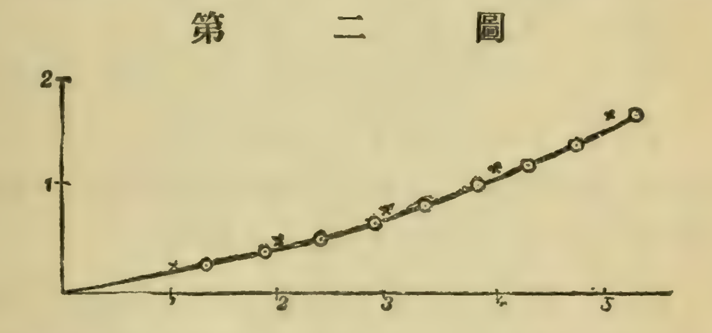
(3) A. H. Bucherer, Math. Einführung in die Elektronentheorie (1904), 58.

磁場與之平行,故射線過蓄電板間,同時又受此磁場之作用,亦不得不轉向. 惟因電場而生之轉向與因磁場而生之轉向互成直角耳.

射線之速度若爲一定,則其像爲一點,速度若有種種,則成一曲線.

第二圖所示者即此曲線也.(1) 縱軸各分畫與橫軸各分畫所表之長度雖不相等,然自其性質言之,此曲線仍表A_m(橫軸)與A_e(縱軸)之關係. 命$\frac{\epsilon}{\mu}$等於1.878×10^7,由相對原理計算,則此曲線應過圖中用小十字(×)標記之點.

第二圖

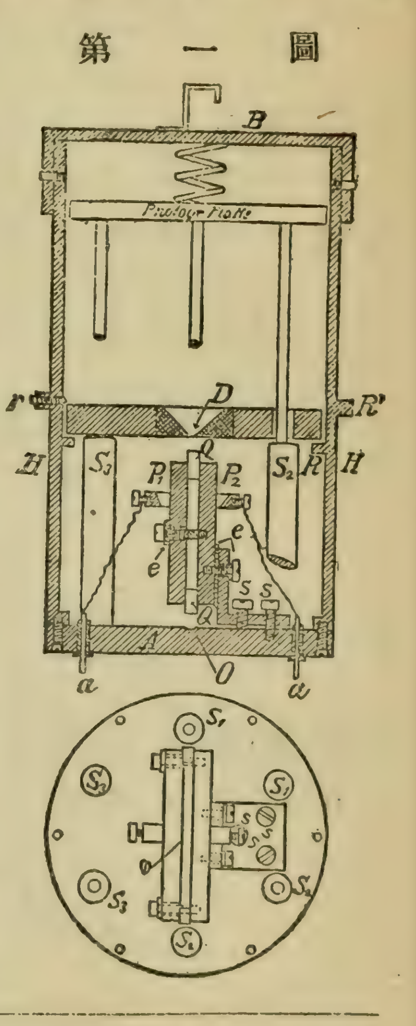


合實驗之結果與理論之結果而比較之,二者雖非完全一致,然吾人試一思及實驗之難,此毫釐之差實不足介意也. 雖然,詳察上圖所示,實驗與理論之差皆偏於一方,有一定規

(1) 圖中數字表照像板上之粍. 此圖非直接由觀測得來之曲線,乃將觀測得來者改算爲轉向小至無限時之曲線.

用負極線實驗時, π, A_e, A_m 三量皆可測定,然關於運動極速之負極線,尚無精詳之研究也. 若用 β 線,則實際能測定者,惟 A_e 與 A_m 二量而已. 此種實驗雖非易事,然考甫曼[1] (Kaufmann)用盡心力,卒由臭化鐳(Radiumbromid)放射了 β 線,求得 A_e 與 A_m 之關係. 今略述之於下.

第一圖



其實驗器具之主要部如圖所示. 全體裝置皆在眞空玻璃箱中. 圖中之 H 爲不漏光之黃銅器,其底之中央有一小坑 O, 中容鐳片. 自此鐳片射出之 β 線先經二蓄電板 P_1 與 P_2 間,然後由直徑0.2粍之斂光孔 D 射出,而落於照像板上. 射線過蓄電板間時,因受其電場之作用而轉向. 然此電場之外尙有一永久磁石之

(1) W. Kaufmann, Über die Konstitution des Elektrons. Ann. d. Phys. [4] 19 (1906).

絕對電氣量,則由(11)之第三式,電子初動時之運動方程式當爲

$$-\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\epsilon}{\mu}\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}\left(Z+\frac{q}{c}M\right)$$

若使電子射線轉向之分電場及分磁場僅爲 Z 與 M,換言之,卽射線轉向只在 XZ 平面內,則其軌道之曲率半徑 R,可由下式求之.

$$\frac{q^2}{R}=\left[\frac{d^2z}{dt^2}\right]$$

設電子射線轉向,僅由於一分電場 Z,或僅由於一分磁場 M,命

$$A_e=\frac{1}{R}:Z,$$

與

$$A_m=\frac{1}{R}:M$$

爲電氣的轉向性與磁氣的轉向性,則由以上所得之方程式,

$$A_e=\frac{\epsilon}{\mu}\frac{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}{q^2},$$

$$A_m=\frac{\epsilon}{\mu}\frac{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}{cq}.$$

$$\frac{d\xi}{dt}=K_x, \quad \frac{d\eta}{dt}=K_y, \quad \frac{d\zeta}{dt}=K_z,$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\delta L}{\delta\xi}, \quad \frac{dy}{dt}=\frac{\delta L}{\delta\eta}, \quad \frac{dz}{dt}=\frac{\delta L}{\delta\zeta}.$$

此卽哈米爾頓之運動方程式也.

§10. 論質點運動之理論可以實驗證明. 考甫曼之研究.

帶電質點之運動速度與光速度相差不遠,其自乘對於 c^2 之比不能略去不計時,前節推論所得之結果,始能有表現於實驗之希望. 運動極速之負極線(Kathodenstrahl)與自放射性物質發出之電子射線(卽 β 線)皆能滿足此要求.

電子射線可以供吾人之實驗的研究者,爲其三量間之關係. 所謂三量卽射線之發生電勢 (potential) 或動能,因電場而起之轉向性(Ablenkbarkeit)與因磁場而起之轉向性是也.

由(14),發生電勢 π 可以次式表之:

$$\pi\epsilon=\mu\left(\frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}-1\right)$$

至於其他二量之計算,則可如下求得: 設電子初動時之方向與 X 軸平行,以 ϵ 表電子之

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta H+A)\,dt=0$$

惟時間 t 一定不變,且最初與最後之位置亦一定不變;式中之 A 表假設之功(virtuelle Arbeit),卽

$$A=K_x\delta x+K_y\delta y+K_z\delta z.$$

余今更造出哈米爾頓之運動方程式以爲本節之收筆. 如上所述,

$$\xi=\frac{\delta H}{\delta\dot{x}}=\frac{\mu x}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c_2}}}$$

於此之外,尙可得與此相似之 $\eta,\ \zeta$ 二量. 此三量可名之曰"動量座標"(卽各座標軸方向之動量).

命

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\rho^2,$$

動能(kinetische Energie) L 可以 $\xi,\ \eta,\ \zeta$ 之函數表之,卽

$$L=\mu c^2\sqrt{1+\frac{\rho^2}{\mu^2c^2}}+\text{恆數.}$$

故

由循環交換法,尙可得二式. 此三式所表者卽動量常存之定律也. 故

$$\xi=\frac{\mu\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}$$

所表之量爲質點之動量,而由(11)式,

$$\frac{d\xi}{dt}=K_x$$

恰與舊力學相同. 吾人所以能同上述方法推出質點之動量者,蓋由於運動方程式中之力,換言之,卽(15)式之第二項可以用對於時間之微分係數表出之故也.

以上所得之質點運動方程式,吾人若欲以拉格蘭之形式 (Lagrangesche Form) 表之,亦甚簡易. 設

$$\dot{H}=-\mu c^2\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}+\text{恆數},$$

則(11)式卽變爲

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\delta H}{\delta\dot{x}}\right]=K_x$$

若欲以哈米爾頓之形式 (Hamiltonsche Form) 表之,則爲

$$(14)\int (K_x\dot{x}+K_y\dot{y}+K_z\dot{z})\,dt=\frac{\mu q^2}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}+\text{恆數。}$$

由此式觀之,(11)式與能之原理二而一者也.今更證明此等方程式與動量常存 (Erhaltung der Bewegungsgrösse) 之原理亦能一致如下:

以

$$\frac{N}{4\pi},\ -\frac{M}{4\pi},\ -\frac{Z}{4\pi},\ \frac{Y}{4\pi}$$

依次乘(5)之第二,第三,及(6)之第二,第三諸式而加之,復求其在某空間內之積分,並假定在此空間之境界上,電磁場強度等於0,則

$$(15)\qquad \frac{d}{dt}\left[\int \frac{1}{4\pi c}(YN-ZM)\,d\omega\right]$$

$$+\int \frac{\rho}{4\pi}\left(X+\frac{\mu_y}{c}N-\frac{\mu_z}{c}M\right)d\omega=0.$$

由(12)式,卽得

$$(15a)\qquad \frac{d}{dt}\left[\int \frac{1}{4\pi c}(YN-ZM)\,d\omega\right]+\Sigma K_x=0$$

若電氣的質量與能自由運動之質量(電子)固結不變,則由(11)式,此式成爲

$$(15b)\qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{4\pi c}(YN-ZM)\,d\omega+\Sigma\frac{\mu\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right]=0.$$

0, 則

$$(13)\qquad \int \frac{\rho}{4\pi}(\mu_x X+\mu_y Y+\mu_z Z)\,d\omega+\frac{dE_e}{dt}=0,$$

而 $$E_e=\int\left[\frac{1}{8\pi}(X^2+Y^2+Z^2)+\frac{1}{8\pi}(L^2+M^2+N^2)\right]d\omega.$$

爲積分空間內之電磁能(elektromagnetische Energie)。 由能之原理(Energieprinzip),(13)式之第一項,當等於有電氣的資量之系統每單位時間自電磁場得來之能。 若電氣的質量與剛體固結不變,換言之,卽有電氣的質量之系統若爲電子,則是項中與此相當之部分等於$\epsilon(X\dot{x}+Y\dot{y}+Z\dot{z})$。 然式中之 X, Y, Z, 乃外部之電場,因電子自有之電氣量而生之電場強度不在其內也。 由(12)式,則此式當變爲

$$K_x\dot{x}+K_y\dot{y}+K_z\dot{z}$$

故由前節之定義,可知此式卽表有向量(K_x, K_y, K_z)所作之功(Arbeit),其關係恰與牛頓力學中力與功之關係相同.

由是推論,吾人若再依次以 x, y, z 乘(11)式而加之,復求其在一定時間內之積分,當得質點(電子)之動能(kinetische Energie),明矣。 其積分之結果如下:

$$
(12)\begin{cases}
K_x=\epsilon\left\{X+\frac{\dot{y}}{c}N-\frac{\dot{z}}{c}M\right\}, \\
K_y=\epsilon\left\{Y+\frac{\dot{z}}{c}L-\frac{\dot{x}}{c}N\right\}, \\
K_z=\epsilon\left\{Z+\frac{\dot{x}}{c}M-\frac{\dot{y}}{c}L\right\}.
\end{cases}
$$

如此,則卽將座標軸之方向改變,若由此而得之新座標系對於 S 座標系不動,此等方程式仍不改其舊觀. 故不必 $\dot{y}=\dot{z}=0$, 此等方程式亦能成立.

有向量 (K_x, K_y, K_z) 名曰質點所受之力. 若 q^2 較 c^2 甚小, $\frac{q^2}{c^2}$ 可以略去不論,則由(11)方程式,此等有向量卽牛頓力學所謂之分力. 在相對論的力學 K_x, K_y, K_z 之職分,實與牛頓力學之力無異,尙當於下節詳論之.

質點所受之力之性質縱不爲電磁的,余以爲(11)方程式依然可用,惟此時(11)式不過爲力之定義,別無物理的內容而已.

§9. 質點之運動與力學之原理.

依次以 $\frac{X}{4\pi}$, $\frac{Y}{4\pi}$, $\frac{Z}{4\pi}$, $\frac{L}{4\pi}$, $\frac{M}{4\pi}$, $\frac{N}{4\pi}$, 乘(5)及(6)之方程式而求其在一定空間內之積分,且假定在此空間之境界上,電場與磁場之強度皆等於

此等方程式即電子之運動方程式,但用此等方程式時,須注意電子現在之速度

$$\dot{x}_0=v, \quad \dot{y}_0=0, \quad \dot{z}_0=0.$$

故左邊之 v 可以

$$q=\sqrt{\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2+\dot{z}_0^2}=0$$

中之 q 代之,右邊之 v 可以 $\dot{x}_0$ 代之. 且用循環變換法可以由 $\frac{\dot{x}_0}{c}M$ 及 $-\frac{\dot{x}_0}{c}N$ 推得之項,雖不見於上述特例中,然若將此等項補足,並除去 x_0 等之指標 0, 則上述特例之方程式即成普遍的形式,而其意義仍與前同。 即

$$(11)\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{\mu\dot{x}}{\sqrt{1-\dfrac{q^2}{c^2}}}\right\}=K_x,\\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{\mu\dot{y}}{\sqrt{1-\dfrac{q^2}{c^2}}}\right\}=K_y,\\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{\mu\dot{z}}{\sqrt{1-\dfrac{q^2}{c^2}}}\right\}=K_z,\end{cases}$$

但

$$t'=\beta\left(t-\frac{v}{c^2}x_0\right),$$

$$x'_0=\beta(x_0-vt),$$

$$y'_0=y_0,$$

$$z'_0=z_0.$$

命 $\frac{dx_0}{dt}=\dot{x}_0$，則由此方程式,可得

$$\frac{dx_0'}{dt'}=\frac{\beta(\dot{x}_0-v)}{\beta\left(1-\frac{v\dot{x}_0}{c^2}\right)},$$

$$\frac{d^2x'_0}{dt'^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dx'_0}{dt'}\right)}{\beta\left(1-\frac{v\dot{x}_0}{c^2}\right)}=\frac{1}{\beta}\frac{\left(1-\frac{v\dot{x}_0}{c^2}\right)\ddot{x}_0+(\dot{x}_0-v)\frac{v\ddot{x}_0}{c^2}}{\left(1-\frac{v\dot{x}_0}{c^2}\right)^3}$$

在此二式中,

$$\dot{x}_0=v,\qquad \dot{y}_0=0,\qquad \dot{z}_0=0.$$

若將此等值代入上述之運動方程式,且同時用(7a)式代其中之 X',Y',Z'，則得

$$\mu\beta^3\ddot{x}_0=\epsilon X,$$

$$\mu\beta\ddot{y}_0=\epsilon\left(Y-\frac{v}{c}N\right),$$

$$\mu\beta\ddot{z}_0=\epsilon\left(Z+\frac{v}{c}M\right).$$

第三章 質點(電子)之力學

§8. (漸次加速之)質點或電子之運動方程式.

設想有帶電氣量 ϵ 之質點(以下名之曰電子)在某電磁場中運動. 吾人可以假定其運動方程式如下。

若在某一定時刻,電子對於 S' 系不動,則自此時刻起,經過極短時間後,電子對於 S' 系之運動可由下列方程式決定之:

$$\mu\frac{d^2x'_0}{dt'^2}=\epsilon X',$$

$$\mu\frac{d^2y'_0}{dt'^2}=\epsilon Y',$$

$$\mu\frac{d^2z'_0}{dt'^2}=\epsilon Z'.$$

式中之 x'_0, y'_0, z'_0 表電子對於 S' 之座標, μ 表一恆數,名曰電子之質量.

今更由對於 S' 系運動之 S 系觀之,以上之運動方程式只須借助於(1)及(7a)之轉換式,即可由 S' 系移於 S 系。 惟在此例,轉換式(1)中之符號當略加修改如下:

直時,此關係仍能成立,不待詳釋. 合以上二特例即可造成通例. 故吾人可以斷言曰:(10)之關係式對於新關係系 S' 亦能成立,且偏光面與平行於波面法線及相對運動方向之平面間所成之角,無論在何關係系均爲同值.

對之 S' 系,波面法線亦與電氣力及磁氣力互成直角,且電氣力與磁氣力互相等. 至於由恆等式 $\Phi=\Phi'$ 可以推出之關係,§6 已詳論之,茲不必重述. 吾人於此,但求得波之擺幅 (Amplitude) 與偏光之狀態卽可也.

假定 X, Y 面與波面法線平行,電氣擺動之方向與 Z 軸平行,則

$$X_0=0, \qquad L_0=-A\sin\phi,$$
$$Y_0=0, \qquad M_0=-A\cos\phi,$$
$$Z_0=A, \qquad N_0=0,$$

式中之 ϕ 表波面法線與 X 軸所成之角. 由上列諸式

$$X'=0, \qquad L'=-A\sin\phi\sin\Phi',$$
$$Y'=0, \qquad M'=\beta\left(-\cos\phi+\frac{v}{c}\right)A\sin\Phi',$$
$$Z'=\beta\left(1-\frac{v}{c}\cos\phi\right)A\sin\phi, \quad N'=0.$$

故若以 A' 表光波對於 S' 系之擺幅,則

$$A'=A\frac{1-\frac{v}{c}\cos\phi}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{10}$$

磁氣力與相對運動之方向及波面法線垂

於任何關係系皆爲定數.

用(1),(7),(8),(9)之諸方程式,凡僅有速度而無加速度之動體電力學與動體光學之問題,皆可變爲靜體電力學與靜體光學之問題.

今更舉一簡單之例,以明上述諸關係式之應用. 設想有一平面光波在眞空中傳布.自 S 系觀察,此光波之性質可以下列方程式表出之:

$$X=X_0\sin\Phi,\qquad L=L_0\sin\Phi,$$

$$Y=Y_0\sin\Phi,\qquad M=M_0\sin\Phi,$$

$$Z=Z_0\sin\Phi,\qquad N=N_0\sin\Phi,$$

$$\Phi=\omega\left(t-\frac{lx+my+nz}{c}\right).$$

今若自 S' 系觀察,此光波之性質當爲何如乎?由(1)與(7)之轉換方程式,則

$$X'=X_0\sin\Phi',\qquad L'=L_0\sin\Phi',$$

$$Y'=\beta\left(Y_0-\frac{v}{c}N_0\right)\sin\Phi',\quad M'=\beta\left(M_0+\frac{v}{c}Z_0\right)\sin\Phi',$$

$$Z'=\beta\left(Z_0+\frac{v}{c}M_0\right)\sin\Phi',\quad N'=\beta\left(N_0-\frac{v}{c}Y_0\right)\sin\Phi',$$

$$\Phi'=\omega'\left(t'-\frac{l'x'+m'y'+n'z'}{c}\right)$$

因函數 X' 等不能不滿足(5′),(6′)之方程式,故

有"動電力"發生。然所謂"動電力"者,若由對於電氣量靜止之座標系觀察之,不過普通所謂之"電氣力"而已。故動電力究在何處,實一無意義之問題。何則,吾人所選之座標系有種種,吾人對於此問題之答詞,亦能有種種也。

(8)式之意義,可以如下解釋之。設想帶電體對於 S' 靜止不動,則其全體之電氣量 ϵ' 當等於

$$\int \frac{\rho'}{4\pi} dx'dy'dz'.$$

自 S 系視之,此帶電體在 S 系之 t 時,其全電氣量 ϵ 當爲何値乎?

由方程式(1)之後三式,t 一定時,

$$dx'dy'dz' = \beta dxdydz.$$

又由(8)式,

$$\rho' = \frac{1}{\beta} \rho$$

故由此二式,

$$\epsilon' = \epsilon$$

由此可知電氣量與關係系之運動狀態無關,已在(8)式之中。詳言之,凡動體之電氣量若對於隨其動體運動之關係系爲一定數,則對

中之 μ'_x, μ'_y, μ'_z 諸量,皆電氣對於 S' 座標系之分速度,故 ρ' 爲電氣對於 S' 系之密度之 4π 倍,明矣. 由是觀之,馬克思威爾-羅倫慈理論之電力學的基礎,實在相對原理也.

吾人解釋(7a)方程式時,須注意以下所言. 設有量等於"1"之點狀電氣,對於 S 座標系,靜止不動. 若此外尙有一等量之點狀電氣,對於 S 靜止不動,且與前者相隔 1 糎之距離,則其所受之力,當等於 1 達因(dyne). 吾人謂所設點狀電氣之量等於"1",卽此意也. 假令此電氣量對於 S' 靜止不動,則由相對原理,其對於 S' 系之量亦當等於"1".[1] 今此電氣量旣對於 S 系靜止不動,則由上述定義,(X, Y, Z) 卽爲其所受之力. 吾人欲知 (X, Y, Z),只須以對於 S 系靜止之螺線秤或其他測力器,測量此電氣量所受之力卽可矣. (X', Y', Z') 之意義亦與此同.

由(7a)與(7b)之方程式觀之,電場強度與磁場強度,不能有獨立之實在性. 此二者存在於某位置(詳言之,點現象之空間的與時間的周圍)與否,須視座標系之選擇法如何,始能決定.

又依舊日之說,電氣量在磁場中運動時,必

(1) 因吾人假定電氣之量與其運動前之歷史無關,故能有此斷案.

$$
(7b)\begin{cases} L' = L, \\ M' = \beta\left(M + \dfrac{v}{c}Z\right), \\ N' = \beta\left(N - \dfrac{v}{c}Y\right). \end{cases}
$$

$$
(8)\quad \rho' = \frac{\delta X'}{\delta x'} + \frac{\delta Y'}{\delta y'} + \frac{\delta Z'}{\delta z'} = \beta\left(1 - \frac{v\mu_x}{c^2}\right)\rho
$$

$$
(9)\begin{cases} \mu_x' = \dfrac{\mu_x - v}{1 - \dfrac{\mu_x v}{c^2}}, \\ \mu_y' = \dfrac{\mu_y}{\beta\left(1 - \dfrac{\mu_x v}{c^2}\right)}, \\ \mu_z' = \dfrac{\mu_z}{\beta\left(1 - \dfrac{\mu_x v}{c^2}\right)}. \end{cases}
$$

如是求得之方程式與(5)及(6)之方程式,形狀完全相同. 且由相對原理論之,電力學的現象,無論對於關係系 S,或對於關係系 S',皆當受治於同一定律之下,故 X', Y', Z' 當為對於 S' 系之電場,L', M', N' 當為對於 S' 系之磁場,可斷言也.[1] 又若將(3)式顛倒之,即可知(9)式

(1) 此等方程式雖與(5)及(6)之方程式一致,吾人尚不能因此遽斷 X' 等為電磁場對於 S' 之強度,或 X' 等尚須與一係數相乘始得為電磁場之強度亦未可知. 然若用§2 求 $\phi(v)$ 函數之法,即可證明此等係數皆為 1 也.

更假定電氣量常與小剛體(遊子,電子)固結不變,則上列諸方程式卽爲建築羅倫慈之動體電力學與動體光學之基礎.

若此等方程式對於 S 系能成立,則由轉換方程式(1),將此等方程式變爲 S' 系之方程式,其形當如下:

$$
(5')\begin{cases}
\frac{1}{c}\left\{\mu_x'\rho' + \frac{\delta X'}{\delta t'}\right\} = \frac{\delta N'}{\delta y'} - \frac{\delta M'}{\delta z'}, \\
\frac{1}{c}\left\{\mu_y'\rho' + \frac{\delta Y'}{\delta t'}\right\} = \frac{\delta L'}{\delta x'} - \frac{\delta N'}{\delta x'}, \\
\frac{1}{c}\left\{\mu_z'\rho' + \frac{\delta Z'}{\delta t'}\right\} = \frac{\delta M'}{\delta x'} - \frac{\delta L'}{\delta y'}.
\end{cases}
$$

$$
(6')\begin{cases}
\frac{1}{c}\ \frac{\delta L'}{\delta t'} = \frac{\delta Y'}{\delta z'} - \frac{\delta Z'}{\delta y'}, \\
\frac{1}{c}\ \frac{\delta M'}{\delta t'} = \frac{\delta Z'}{\delta x'} - \frac{\delta X'}{\delta z'}, \\
\frac{1}{c}\ \frac{\delta N'}{\delta t'} = \frac{\delta X'}{\delta y'} - \frac{\delta Y'}{\delta x'}.
\end{cases}
$$

在此等方程式中,

$$
(7a)\begin{cases}
X' = X, \\
Y' = \beta\left(Y - \frac{v}{c}N\right), \\
Z' = \beta\left(Z + \frac{v}{c}M\right).
\end{cases}
$$

第二章　電力學

§7. 馬克思威爾-羅倫慈之方程式之轉換.

本章立論,自下列方程式始.

$$(5)\begin{cases}\frac{1}{c}\left\{\mu_x\rho+\frac{\delta X}{\delta t}\right\}=\frac{\delta N}{\delta y}-\frac{\delta M}{\delta z},\\ \frac{1}{c}\left\{\mu_y\rho+\frac{\delta Y}{\delta t}\right\}=\frac{\delta L}{\delta z}-\frac{\delta N}{\delta z},\\ \frac{1}{c}\left\{\rho_z\mu+\frac{\delta Z}{\delta t}\right\}=\frac{\delta M}{\delta x}-\frac{\delta L}{\delta y}.\end{cases}$$

$$(6)\begin{cases}\frac{1}{c}\,\frac{\delta L}{\delta t}=\frac{\delta Y}{\delta z}-\frac{\delta Z}{\delta y},\\ \frac{1}{c}\,\frac{\delta M}{\delta t}=\frac{\delta Z}{\delta x}-\frac{\delta X}{\delta z},\\ \frac{1}{c}\,\frac{\delta N}{\delta t}=\frac{\delta X}{\delta y}-\frac{\delta Y}{\delta x}.\end{cases}$$

在此等方程式中,

(X,Y,Z)　表電場強度之有向量,

(L,M,N)　表磁場強度之有向量,

$$\rho=\frac{\delta X}{\delta x}+\frac{\delta Y}{\delta y}+\frac{\delta Z}{\delta z}$$

表電氣密度之 4π 倍,

(μ_x,μ_y,μ_z) 表電氣速度之有向量.

由靜體光學,V'當爲ω'之函數. 以第二式之左右兩邊除第一式之左右兩邊,則得

$$V=\frac{V'+v}{1+\frac{V'v}{c^2}}.$$

然不必用此法,即直接由速度加法定理亦可以求得此式也.[1] 要之,若已知V'之值則吾人之問題卽可由此式完全解決. 若只知光對於"靜止"系之振動數ω——例如費左(Fizeau)之實驗——則ω', V', 與V之三未知量,可由上列二方程式及ω'與V'之關係決定之.

又若G與G'表光對於S與S'之波羣速度,則由速度之加法定理,

$$G=\frac{G'+v}{1+\frac{G'v}{c^2}}$$

G'與ω'間之關係,乃吾人由靜體光學已得知者,[2]而ω'又可以由ω算出,如上所述,故若知光對於S之擺動數,物體之性質,及其運動速度,則波羣速度G卽不難求得矣.

---

(1) Laue, Ann. d. phys. [4] 23, (1905) 988.

(2) $G'=\frac{V'}{1+\frac{1}{V'}\frac{dV'}{d\omega'}}$.

光波之法線(卽光線之方向)與 S 之 x 軸所成之角,以 ϕ' 表其法線與 S' 之 x' 軸所感之角,則(4)之 l' 式可改寫之如下:

$$\cos\phi' = \frac{\cos\phi - \frac{v}{c}}{1 - \cos\phi\frac{v}{c}}$$

由此方程式,觀察者對於無窮遠方之光源運動時,光源之位置常受其運動之影響. 此卽所謂光之斜行(Aberration des Lichts)也.

又設想光在運動媒質中傳布,其速度爲何如乎?此問題亦可以轉換方程式解決之. 假定媒質對於 S' 系靜止不動,光之有向量,對於 S',與

$$\mathrm{Sin}\,\omega'\left(t' - \frac{x'}{V'}\right),$$

爲正比例,對於 S, 與

$$\mathrm{Sin}\,\omega\left(t - \frac{v}{V}\right)$$

爲正比例. 由轉換方程式,則得

$$\omega = \beta\omega'\left(1 + \frac{v}{V'}\right),$$

$$\frac{\omega}{V} = \beta\frac{\omega'}{V'}\left(1 + \frac{V'v}{c^2}\right).$$

亦有二種不同之解釋.

1.　設(在無窮遠方之)光源之擺動數爲ν,觀察者對於光源運動之速度爲v,觀察者測得光之擺動數爲ν'.　由對於光源靜止不動之座標系,測量"光源——觀測者"之連結線與觀察者之運動方向所成之角,以ϕ表之,則

$$\nu'=\nu\frac{1-\cos\phi\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

2.　今在對於觀察者靜止不動之座標系上測量"光源一觀察者"之連結線與光源之運動方向所成之角,命之爲ϕ.　在隨光源運動之座標系上觀察光之擺動數,命之ν.　觀察者測得之光之擺動數當如下方程式中之ν:

$$\nu=\nu_0\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\cos\phi\frac{v}{c}}$$

以上二方程式卽廣義的多卜勒爾原理.　自溝線(Kanalstrahl)發出之(或爲其吸收之)光,其觀測擺動數常與遊子之運動速度及視線之方向有關,由第二式卽可證明.　今更以ϕ表

之結果.

設有一平面光波在眞空中傳布,其有向量(Vektor)對於 S 與

$$\mathrm{Sin}\,\omega\left(t-\frac{lx+my+nz}{c}\right)$$

爲正比例,對於 S' 則與

$$\mathrm{Sin}\,\omega'\left(t'-\frac{l'x'+m'y'+n'z'}{c}\right)$$

爲正比例. 由§3所得之轉換方程式,ω, l, m, n 與 ω', l', m', n' 之間不能不有下列之關係:

$$(4)\begin{cases}\omega'=\omega\beta\left(1-l\dfrac{v}{c}\right),\\[2ex] l'=\dfrac{l-\dfrac{v}{c}}{1-l\dfrac{v}{c}},\\[2ex] m'=\dfrac{m}{\beta\left(1-l\dfrac{v}{c}\right)},\\[2ex] n'=\dfrac{n}{\beta\left(1-l\dfrac{v}{c}\right)}.\end{cases}$$

設想觀察者動而(在無窮遠方之)光源不動,或設想觀察者不動而光源動. ω' 之式之意義

S 之 x 軸上布滿物質,由此物質帶判斷,作用在其中傳布之速度爲 W. 設於 $x=0$ 之點(A 點)與 $x=l$ 之點,各有一觀察者對於 S 靜止不動.

今 A 點之觀察者以上述作用,由物質帶中通信與 B 點之觀察者. 若此物質帶以速度 $v(<c)$ 沿 x 軸之負方向運動,則由方程式(3),信之速度當爲

$$\frac{W-v}{1-\frac{Wv}{c^2}},$$

命信自 A 至 B 所要之時間爲 T, 則

$$T=l\frac{1-\frac{Wv}{c^2}}{W-v},$$

速度 v 無論爲何值均可,但不能較 c 大. 故吾人若假定 $W>c$, 則 v 之值選擇合宜時,常能使 $T<0$. 如是,則用此傳信機卽可將原因與結果顚倒矣. 余以爲自純粹的論理言之,結果起於原因之先,雖亦不爲矛盾,然自經驗言之,必無此事. 故 $W>c$ 之假定不能成立,由此可以斷言也.

§6. 轉換方程式應用於光學問題所得

且命 x' 軸 (v) 與質點對於 S' 之運動方向(即 μ')所成之角爲 a，則

$$\mu=\frac{\sqrt{(v^2+\mu'^2+2v\mu'\cos a)-\left(\frac{v\mu'\sin a}{c}\right)^2}}{1+\frac{v\mu'\cos a}{c^2}}$$

若兩速度(μ' 與 v)之方向一致，則

$$\mu=\frac{v+\mu'}{1+\frac{v\mu'}{c^2}}$$

由此方程式，可知小於光速度之二速度相加之結果常仍小於光速度. 何則，命 $v=c-\kappa$, $\mu'=c-\lambda$，若 κ 與 λ 皆爲正數且小於 c，則

$$\mu=c\frac{2c-\kappa-\lambda}{2c-\kappa-\lambda+\frac{\kappa\lambda}{c}}<c$$

故也.

不寧惟是，即兩速度之中，一爲等光速度 c，一爲"遜光速度 (Unterlichtgeschwindigkeit)"——即較光小之速度——二者相加之結果，仍與光速度相等.

由此速度加法定理，尙可得一最有趣味之結果，即吾人無論用何作用傳信，其速度決不能較光在眞空中傳布之速度大是也. 設想

S 之 x 軸上布滿物質,由此物質帶判斷,作用在其中傳布之速度爲 W。設於 $x=0$ 之點(A 點)與 $x=l$ 之點,各有一觀察者對於 S 靜止不動。

今 A 點之觀察者以上述作用,由物質帶中通信與 B 點之觀察者。若此物質帶以速度 $v(<c)$ 沿 x 軸之負方向運動,則由方程式(3),信之速度當爲

$$\frac{W-v}{1-\frac{Wv}{c^2}},$$

命信自 A 至 B 所要之時間爲 T,則

$$T=l\frac{1-\frac{Wv}{c^2}}{W-v},$$

速度 v 無論爲何值均可,但不能較 c 大。故吾人若假定 $W>c$,則 v 之值選擇合宜時,常能使 $T<0$。如是,則用此傳信機即可將原因與結果顚倒矣。余以爲自純粹的論理言之,結果起於原因之先,雖亦不爲矛盾,然自經驗言之,必無此事。故 $W>c$ 之假定不能成立,由此可以斷言也。

§6. 轉換方程式應用於光學問題所得

且命 x' 軸 (v) 與質點對於 S' 之運動方向(卽 μ')所成之角爲 α, 則

$$\mu=\frac{\sqrt{(v^2+\mu'^2+2v\mu'\cos\alpha)-\left(\frac{v\mu'\sin\alpha}{c^2}\right)^2}}{1+\frac{v\mu'\cos\alpha}{c^2}}$$

若兩速度(μ' 與 v)之方向一致,則

$$\mu=\frac{v+\mu'}{1+\frac{v\mu'}{c^2}}$$

由此方程式,可知小於光速度之二速度相加之結果常仍小於光速度. 何則,命 $v=c-\kappa$, $\mu'=c-\lambda$, 若 κ 與 λ 皆爲正數且小於 c, 則

$$\mu=c\frac{2c-\kappa-\lambda}{2c-\kappa-\lambda+\frac{\kappa\lambda}{c}}<c$$

故也.

不寧惟是,卽兩速度之中,一爲等光速度 c, 一爲"遜光速度 (Unterlichtgeschwindigkeit)"——卽較光小之速度——二者相加之結果,仍與光速度相等.

由此速度加法定理,尙可得一最有趣味之結果,卽吾人無論用何作用傳信,其速度決不能較光在眞空中傳布之速度大是也. 設想

$$x' = \mu'_x t',$$
$$y' = \mu'_y t',$$
$$z' = \mu'_z t'.$$

命此質點對於 S 系之分速度爲 μ_x, μ_y, μ_z, 由轉換式(1)變上列三式中之 x', y', z', t' 爲 x, y, z, t, 則 x, y, z 均爲 t 之函數,而

$$(3)\begin{cases} \mu_x = \dfrac{\mu_x' + v}{1 + \dfrac{v\mu'_x}{c^2}}, \\ \mu_y = \dfrac{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{v\mu'_x}{c^2}} \mu'_y, \\ \mu_z = \dfrac{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{v\mu'_x}{c^2}} \mu'_z. \end{cases}$$

故速度之平行四邊形定理一般不能成立;惟座標系 S' 對於 S 之速度,與質點對於 S' 之速度,皆遠不及光速度時,若將上式中之第二階級小數,略去不論,則速度之平行四邊形定理亦仍可用。

命

$$\mu^2 = \mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2,$$
$$\mu'^2 = \mu'^2_x + \mu'^2_y + \mu'^2_z.$$

$$1 : \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

$\nu=\nu_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ 一式,應用頗廣. 去年斯塔克[1](Stark)氏曾發見運河線(Kanalstrahl)之遊子(Ion)能生線狀光景(Linienspektrum),且得觀測其光景線(Spektrallinie)因多卜勒爾效果(Dopplereffekt)而起之變位,卽其一也.

與光景線相當之擺動現象,乃原子之內部的現象,其擺動數惟因遊子而定,故吾人可視此等遊子爲有一定擺動數 ν_0 之時鐘. 吾人只須研究此等遊子對於吾人靜止時,其所發之光爲何如,則其擺動數卽不難尋得. 由是觀之,運動對於光之擺動數(由觀察者所見者)有何影響尙不能以多卜勒爾效果完全決定.

於多卜勒爾效果之外,運動尙能使發光遊子之(皮相的)固有擺動數減少也.[2]

§5. 速度之加法定理.

設有一質點對於 S' 系以等速度運動,命其分速度爲 μ_x', μ_y', μ_z', 則

(1) J. Stark, Ann. d. Phys. [4] 21, (1906), 401.

(2) 參考 § 6 (4a) 式.

由此可知關係系相對運動之速度,不能在光速度以上,否則與吾人之相對原理不能相融.

2. 設有一時鐘靜止於 S' 座標系之原點,且此時鐘所報之時,較之 S 及 S' 系用以測定時間之時鐘,常早 ν_0 倍,換言之若 S 及 S' 系測定時間用之時鐘與此時鐘相對靜止不動,則前者進一單位時,後者進 ν_0 單位. 今自 S 座標系觀察此時鐘,當早進若干單位乎?

自 S' 系觀之, $t'_n=\frac{n}{\nu_0}$ 時,吾人所設之時鐘恰滿一週期. 式中之 n 爲任何整數均可. 因所設時鐘常在 $x'=0$ 之點靜止不動,由轉換方程式中之首二式,若自 S 座標系觀察此時鐘,則

$$t_n=\beta t'_n=\frac{\beta}{\nu_0}n$$

時,恰滿一週期.

故自 S 系觀之,每單位時間,所設時鐘經過之週期數當爲

$$\nu=\frac{\nu_0}{\beta}=\nu_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

卽對於一關係系以等速度 v 運動之時間,自此關係系觀之,常較對於此系靜止之時鐘遲;而後者與前者之比常等於

不必實行計算後始知,直接由相對原理,即可推而知。何則,S'對S以速度v沿x軸之方向平行運動,與S對S'以速度$-v$沿x'軸之方向平行運動,無以異也。

推而廣之,由相對原理,吾人若知"有標量"(由S'定義者)與"無標量"(由S定義者)之間,有一正確之關係,則將相應之二記號交換,並將v與$-v$交換,又可得一正確之關係。

§4. 關於剛體與時鐘可以由轉換方程式推出之諸結果.

1. 設有一物體對於S'靜止不動。其中二質點對於S'之座標,各以x_1', y_1', z_1'及x_2', y_2', z_2'表之。又在S之t時,此二質點對於S之座標,各以x_1, y_1, z_1, 及x_2, y_2, z_2表之。由上述之轉換方程式,可得下列諸關係:

$$(2)\begin{cases} x_2-x_1=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}(x_2'-x_1'), \\ y_2-y_1=y_2'-y_1', \\ z_2-z_1=z_2'-z_1'. \end{cases}$$

故一物體若以等速度平行運動,則其運動學形與其對於關係系之速度有不可離之關係。運動方向之單位長常縮短爲$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

S 與 S'' 之座標原點相同,座標軸之方向相同,且兩系相等,故上列轉換式當為恆等,[1] 即

$$\phi(v)\cdot\phi(-v)=1.$$

又 y 與 y' 之關係與 v 之符號無關,故

$$\phi(v)=\phi(-v),$$

即 $\phi(v)=1$.[2] 由是得吾人所求之轉換方程式:

$$(1)\begin{cases} t'=\beta\left(t-\dfrac{v}{c^2}x\right), \\ x'=\beta(x-vt), \\ y'=y, \\ z'=z. \end{cases}$$

但

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

若由方程式(1),求 x, y, z, t, 所得之式亦為同形,不過"有標量 (gestrichene Grösse)"——即以頭上加有標記之字母表者,如 x'——與"無標量(ungestrichene Grösse)"——即以頭上未加標記之字母表者,如 x——交換,且 v 與 $-v$ 交換而已. 此事

(1) 假定尺與鐘動後復靜時,尺之長短,鐘之遲速完全復舊,則當然得此斷案.

(2) $\phi(v)=-1$ 不適於吾人之問題.

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2$$

與

$$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$$

二式皆有同義. 由此二式與上列 x', y', z' 之三式計算,則所求之轉換方程式當爲

$$t' = \phi(v) \cdot \beta \cdot \left(t - \frac{v}{c^2}x\right),$$

$$x' = \phi(v) \cdot \beta \cdot (x - vt),$$

$$y' = \phi(v) \cdot y,$$

$$z' = \phi(v) \cdot z.$$

首二式中之 β 之值如下式:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

v 之函數可以下法決定之. 設想上述二關係系外,尚有第三關係系 S'' 與 S 及 S' 全相等. 又設想 S'' 對於 S', 以 $-v$ 之速度運動,且 S'' 對於 S' 之方向與 S' 對於 S 之方向同. 將以上所得之方程式連用二次卽可求得

$$t'' = \phi(v) \cdot \phi(-v) \cdot t,$$

$$x'' = \phi(v) \cdot \phi(-v) \cdot x,$$

$$y'' = \phi(v) \cdot \phi(-v) \cdot y,$$

$$z'' = \phi(v) \cdot \phi(-v) \cdot z.$$

述變數,不可不爲一次式. 何則,由空間與時間之均等性(Homogenitätseigenschaft),不得不如此也. 由此關係,可知 S' 之座標平面,對於關係系 S,爲等速運動之平面. 惟此等平面初未必互成直角耳. 然吾人若特選 S' 對於 S 平行運動之方向爲 x' 軸之方向,則吾人由對稱之關係,可以斷言 S' 之座標平面對於 S 不能不互成直角. 吾人尙可更進一步令 S' 之 x' 軸常與 S 之 x 軸一致,令 S' 之 y' 軸常與 S 之 y 軸平行. 若再以座標原點相合之時刻,爲兩系時間之起點,吾人所欲得之一次轉換方程式卽成齊次(homogen)式.

S' 之座標平面對於 S 之位置旣明,則以下所列各對方程式之意義皆同,可推而知也.

$$x' = 0 \quad 與 \quad x - vt = 0,$$
$$y' = 0 \quad 與 \quad y = 0,$$
$$z' = 0 \quad 與 \quad z = 0.$$

故所求轉換方程式中之三當如下形:

$$x' = a(x - vt),$$
$$y' = by,$$
$$z' = cz.$$

因光在眞空中傳布之速度無論對於何關係系皆同爲恒數 c,故

其幾何學形合而爲一.

設觀察者對於關係系靜止,物體對於關係系運動,則其觀察者所見者,爲物體之運動學形,非其幾何學形. 此理至明,不待多言也.

余今後爲欲避言語之煩,不再一一標出此等全名,凡敍述一物體之幾何學的內容時,若對於關係系 S 言,則文義所指者爲其運動學形,否則係指其幾何學形.

§3. 空間－時間－轉換.

設 S 與 S' 爲完全相等之二關係系,換言之,二系相對靜止時,若將其單位尺與時鐘相比較,尺之長短相同,鐘之遲速亦相同. 如是則 S 與 S' 相對靜止時,對於 S 可以成立之自然定律,對於 S' 亦可以成立,自不待言. 然由相對原理,縱令 S' 對於 S 以等速度平行運動,自然定律仍不至於因之而變. 在眞空中傳布之光速度,無論對於何關係系,均不能不爲同値.

設有一點現象在 S 系由 x, y, z, t 四變數決定,在 S' 系則由 x', y', z', t' 決定. 假定 S 與 S' 有相對速度而無加速度,則此兩組變數之間有何方程式以爲聯絡乎?

吾人可以先事預言者,此等方程式,對於上

§2. 關於空間與時間之一般的注意.

1. 設想有數剛體均無加速度,且無相對速度. 吾人若能就其相對的位置,求得一定律以統括此等物體,則由相對原理,可知此等物體全體一致運動時,其定律亦不變. 故幾何學之定理常能不問各物體公有之運動情況,而決定其在空間中之配置. 由是觀之,運動體若無加速度,其形即可得而言. 余由此義,今後卽名物體之形曰幾何學形. 幾何學形與關係系之運動狀態無關.

2. 由§1之時間定義,時間之指示,惟在運動狀態一定不變之關係系,始有意義. 由此吾人可以推想相離之二點現象對於關係系 S 縱爲同時,對於關係系 S' 不必亦爲同時(詳見後文).

3. 設想由無數質點 P 構成之物體對於某關係系 S 運動. 在 S 之時刻 t, 各質點 P 在 S 中當占一定位置. 換言之,其時質點 P 當與對於 S 靜止不動之定點 π 相重. π 點之位置全體,吾人名之曰物體對於 S 坐標系之位置. π 點之相對位置之全體關係,吾人名之曰物體對於 S 之運動學形. 若物體對於 S 靜止不動,則其對於 S 之運動學形卽與

種實驗而成之羅倫慈理論[1]實足以保證其不誤也。

設想空間各點均設有如上所述之時鐘,且各時鐘均對於座標系靜止不動,則此等時鐘所指示之時間,可名之曰屬於吾人所用座標系之時間,或簡稱之曰本系時間。

吾人所用之座標系,單位尺,與測量本系時間之時鐘,合名曰"關係系(Bezugssystem) S"。今試想關係系 S 對於太陽靜止不動,吾人用之,求得一自然定律。又試想此關係系 S 忽爲外來之原因所迫,暫時以加速度運動,復達於無加速度之狀態。如是則關係系 S 之運動狀態已不如前;若再以之觀測現象,自然定律當爲何如乎?

吾人於此,再設一假定如下: 自然定律與關係系之運動狀態無關,或退一步言之,關係系無加速度時,自然定律與其運動狀態無關。

此假定由邁克爾生與摩利之實驗即可想到,今後余將名之曰"相對原理(Relativitätsprinzip)"。

光速度一定之原理與相對原理者,即吾人今後之論據也。

(1) 羅倫慈,動體之電學與光學現象之理論研究 1895. 羅氏理論之最足注目者,在能推出隨行係數,與費左(Fizeau)之實驗若合符節。

刻之差皆爲一定. 若吾人有法整理此等時鐘,則以之分布於極相近之各點時,任何點現象之時間之値,皆可以其近傍之時鐘定之.

然此等時鐘所示之全體內容,恐尙不足以爲物理學所要之"時". 欲達此目的,吾人尙須有一規定,以整理此等時鐘之相對的時間始可也.

吾人於此設一假定如下: 若座標系無加速度,則吾人常能整理此等時鐘,令其量得光在眞空中傳布之速度,無論何處均爲恆數 c.

設有 A, B 二點對於座標系靜止不動,且其旁各有一時鐘. 以 r 表二點間之距離,以 t_A 表在眞空中循 AB 方向前進之光至 A 點時 A 旁時鐘所指之時刻,以 t_B 表光至 B 點時 B 旁時鐘所指之時刻,則無論光源與其他物體如何運動,吾人常得

$$\frac{r}{t_B-t_A}=c.$$

上述假定,余欲名之曰"光速度一定之原理(Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit)." 此原理在自然界中眞能成立與否,雖非自明,然至少對於運動情況一定不變之座標系,根據種

第一章 運動學

§1. 光速度一定之原理. 時間之定義. 相對原理.

欲記錄一物理現象,須能將空間各點所起變化之位置與時刻,用數標出始可.

若一現象繼續之時間短至於無限,則可謂之點現象(Punkterscheinung). 欲決定點現象之位置,須有一笛卡兒座標系(Kartesisches Koordinatensystem),與一測長之剛體尺.[1] 所謂笛氏座標系者,卽互成直角且固結不變之三剛體棒是也. 由幾何學之方法,點之位置或點現象之位置,常得以三量,卽座標 x, y, z, 定之.[2] 欲決定點現象發生之時刻,則須用時鐘;而其時鐘須對於坐標軸靜止不動,且卽位於點現象之近傍. 點現象發生之時刻,卽以其近傍之時鐘所指之時刻定之.

設想有無數對於座標系靜止不動之時鐘分布於各點. 並設想此等時鐘完全相同,若置之於極相近處而整理之,其中二者所示時

(1) 不言"剛體",而言不受變形力之固體亦可. 以後凡言剛體處,均可作如是解.

(2) 欲行此事,尙須借界尺與圓規之助.

1907, 371) 及蒲郎克之論文(Berlin. Ber. 29. 1907)中,亦曾論之. 然余自信本章所用之方法爲從來所未有,由此新方法,則理論之基礎與其應用之關係,當更瞭然. 本章於上述問題之外,並論熱率(Entropie)與温度對於運動狀況之關係. 關於熱率,余則全從蒲郎克之論文(卽以上所引之論文). 至於運動體之温度,摩曾蓋爾[1]論運動之空洞輻射文中曾下一定義,余今所用之定義亦與摩氏同.

第四章所得諸結果中,最重要者,莫如能之惰性質量(Inertialmass). 由此結果可以引起一大問題,卽能是否亦有重力質量(Gravitations-mass)是也. 且相對原理僅限於無加速度之運動系耶,抑尚可擴而充之耶? 此亦今日迫於吾人目前之問題. 余不欲全置此問題於不答,故特加第五章以述余由相對論觀察加速度與重力之新說.

(1) Kurd von Mosengeil, Ann. d. Phys. [4], 22. 1907, 867.

統,今日所知者,皆可於此文中見之.

此論文之第一二章論運動學之基礎,並論馬克思威爾(Maxwell)與羅倫慈理論之基礎方程式之應用. 此二章之所論,取材於羅倫慈之論文(Verls. Kon. Akad. d. Wet., Amsterdam 1904)及余之論文[1] (Ann. d. Phys. 〔4〕, 17. 1905).

第一節專論理論運動學之基礎,然光學問題,如多卜勒爾之原理(Dopplersches Prinzip),光之斜行(Aberration),運動體中光之隨行(Mitführung)等,亦兼論之. 此等問題可與運動學之基礎相提並論,余由勞愛(Laue)氏與余之談論及論文(Ann. d. Phys. 〔4〕, 23. 1907, 989)與勞愛之論文(Ann. d. Phys. 〔4〕, 32. 1907. 此論文尚須訂正)始留意及之.

第三章論質點(電子)力學之發展. 余於此章推演運動方程式之際,仍用以上所述余之論文中曾用之方法. 力之定義則遵蒲郎克(Planck)之論文. 質點之運動方程式之變形,亦從蒲氏. 蓋由蒲氏所論,此式與舊力學之運動方程式之相似,可以一目了然故也.

第四章論物理系之能(Energie)與運動量,詳述其由相對原理得來之普遍結果. 此章所論者,於余之論文(Ann. d. Phys. 〔4〕, 18. 1905; 639; 23.

(1) 柯恩(Cohn)亦有此類論文,然余未用.

此實驗與理論之矛盾起見,遂不得不假定物體運動時,其運動方向之長常縮短一定量。邁克爾生與摩利之實驗所以不能尋得地球對於光以太之運動者,卽由於此。然此假定不過爲欲救理論之危,臨機思得之一策而已.

假令無羅倫慈之理論,則邁克爾生與摩利之實驗,亦不過爲相對原理增一左證,毫不足怪。故吾人若能捨去羅氏之理論,以相對原理爲基礎,別建一新理論以代之,則邁克爾生與摩利之徒勞無功,當早爲此新理論所料,明矣.

然欲去上述之難,亦非難事。余一再思之,吾人但能辨明時間之觀念,以羅倫慈引爲輔助之地方時(Ortszeit)爲時間之定義,則新理論卽可由此構成。換言之,吾人若用此新時間觀念,改造上述之轉換式,則羅倫慈理論之基礎方程式,恰能與相對原理相合,且羅倫慈與費慈·吉拉爾之假說亦成爲此理論之當然的斷論也。惟光以太之舊觀念則與此理論不能相融。依舊日之觀念,所謂光以太者,乃保有電力與磁力之物,而自此理論觀之,電磁場並非物質之狀態,其存在超然獨立,且具有惰性,與有重量之物質之惰性,無以異焉。

結合羅倫慈之理論與相對原理而成之系

然自羅倫慈 (H. A. Lorentz) 之動體電力學[1]出世以後,此原理爲其光華所掩,遂幾於不可復存矣。蓋羅氏之意,以爲所謂光之以太 (Lichtäther) 者,乃絕對靜止之物;其全部理論,卽根據此假定而生,故若用上述之轉換式,移舊座標系於新座標系,則其理論之基礎方程式,不能保有原形也。

由此理論,則吾人可以豫想地球對於光以太之運動,當能以光學的現象證明。惟當實驗之際,相對運動及於光路之影響,若僅與相對速度 v 對於光速度 c 之比 $\frac{v}{c}$ 相比例,則吾人之豫想仍非其實驗所能證實。此乃由羅氏之根本假定推得之結果,其論文中已詳言之,爲吾人所熟知者也。然邁克爾生(Michelson)與摩利 (Morley)[2] 之實驗所欲探尋之影響,係與 $\frac{v}{c}$ 之二乘相比例。自羅氏理論之基礎觀之,宜若可得矣。而竟徒勞無功,可不謂奇乎?

羅倫慈與費慈·吉拉爾 (Fitz-Gerald) 爲欲調和

(1) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden 1895.
動體之電學與光學現象之理論研究.

(2) A. A. Michelson und E. W. Morley. Amer. Journ. of Science [3], 34 (1887) 333.

相對原理及其推論

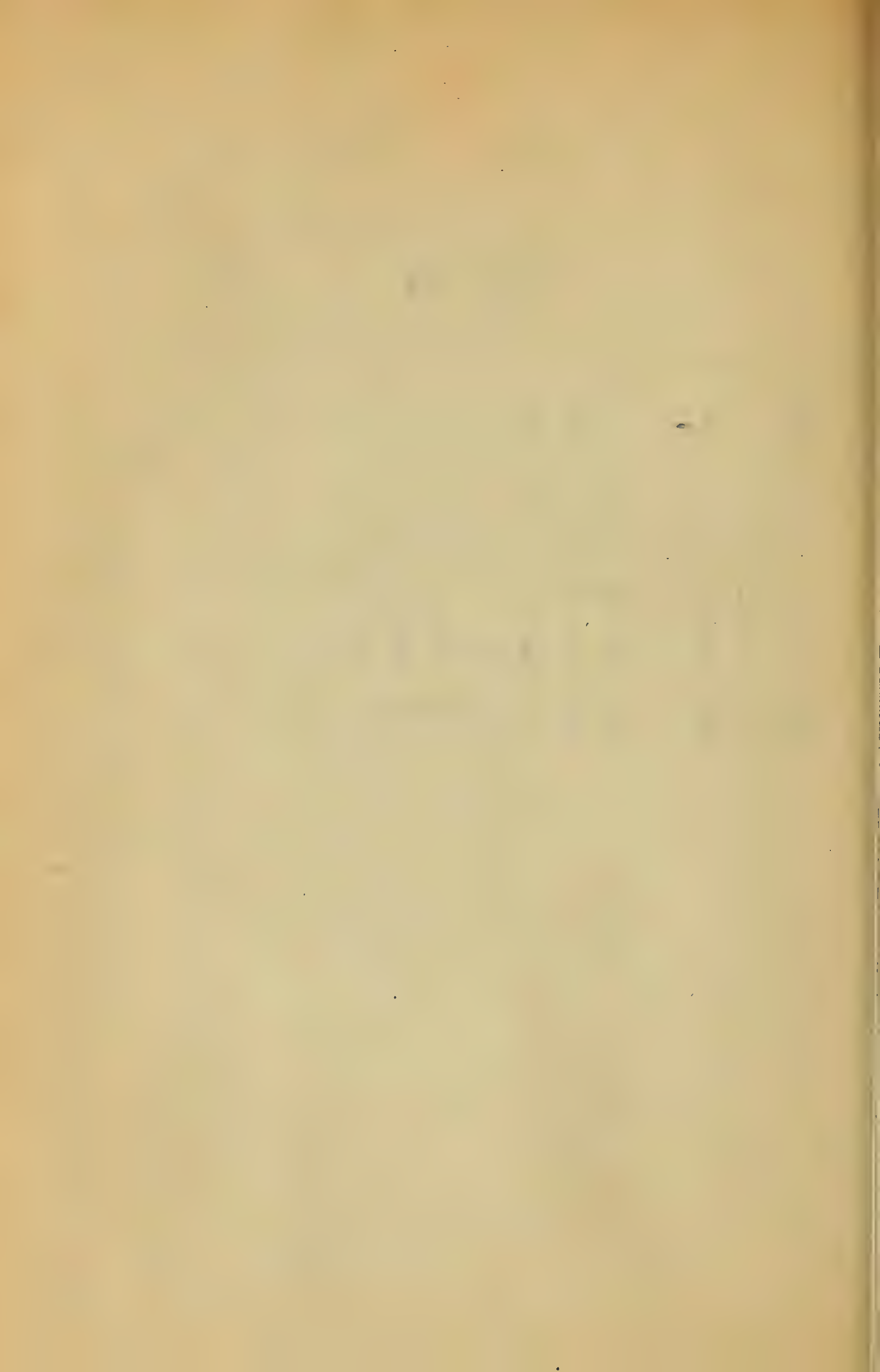
Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen.

緒論

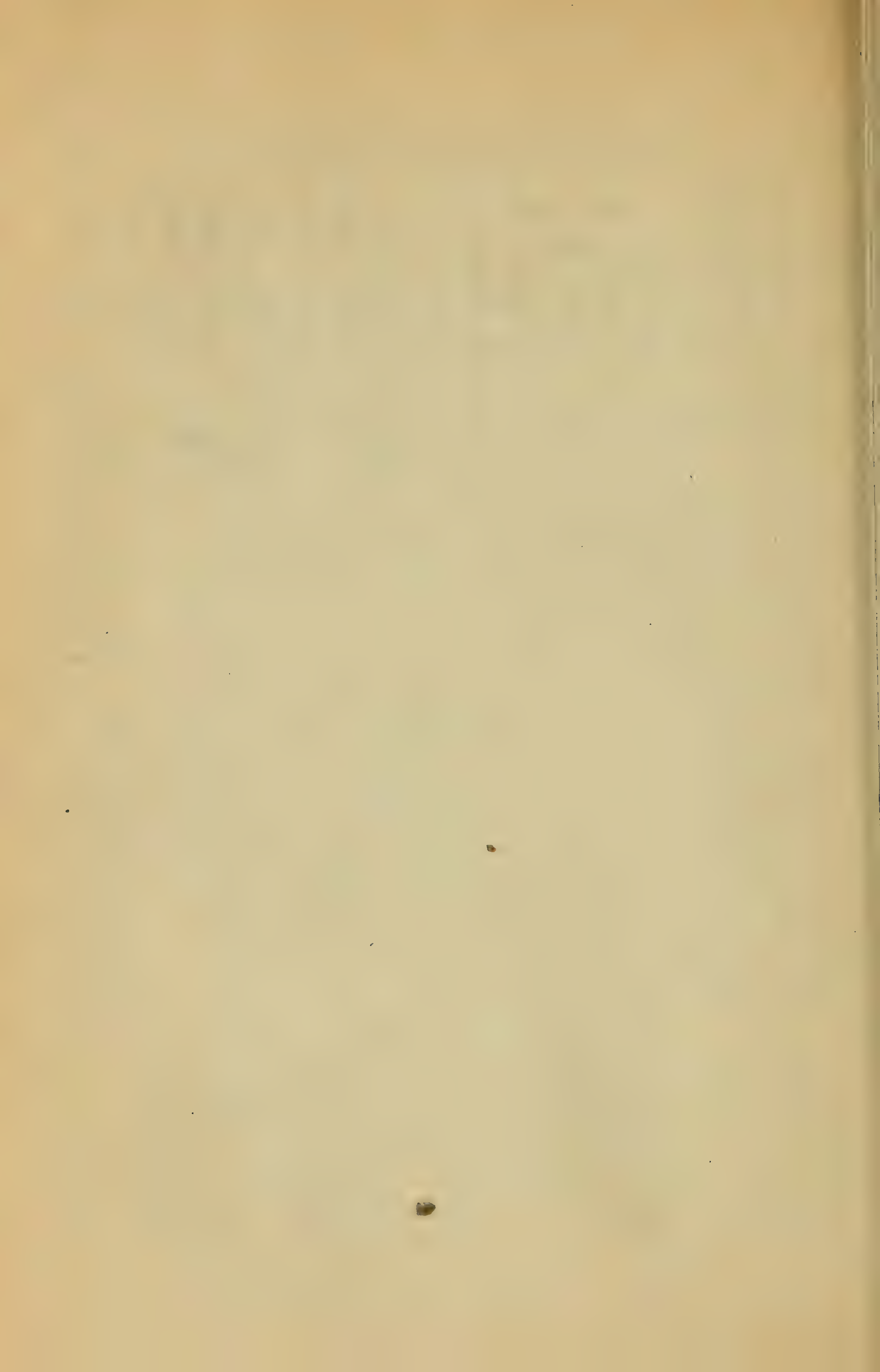
設想吾人用一座標系記錄運動現象,而得牛頓 (Newton) 之運動方程式. 又設想別有一座標系對於吾人所用之座標系,以等速度 v 在一直線上運動. 則吾人由下列諸式:

$$x' = x - vt,$$
$$y' = y,$$
$$z' = z,$$

變舊座標系之記錄,爲新座標系之記錄,牛頓之運動方程式仍不改其舊觀. 故吾人若深信牛頓之運動方程式足以爲全物理學之基礎,則以等速度相對運動之無數座標系,皆有平等之價值;吾人以其中之一,記錄自然現象而得之自然定律,與用其他所得者,必爲同形,不待辨而自明也. 自然定律之形式與座標系之運動情况無關;此陳辭名曰相對原理.



目 錄



竣事,未能一字一句詳加審察,不忠於原著之處,實所不免,尚冀讀者正之.

又余之承譯此書,實由余友夏元瑮君之獎勸. 爰記於此,以表謝忱.

民國十三年二月十五日　文元模

加速度之座標系,由此創造萬有引力新說,是爲普遍相對論 (Allgemeine Relativitätstheorie) 之開場. 此思想產出以後,雖經無數變遷,始底於成,然普遍相對論之基礎,即今日所謂"等價原理 (Equivalenzprinzip)"者,已具於此章之中,且光路在萬有引力場中當成曲線之豫言,亦早於此道破,是誠不能不令人驚歎者也. 要之,本文雖非相對論之全豹,然特別相對論成長之歷程,與普遍相對論發生之狀態,皆表現極明. 且其所用數學,不過初等程度之微積分,尤便於數學訓練不足之讀者. 此書之裨益於一般學生,當倍屣於 Weyl, Laue, Pauli 等之諸書,可斷言矣. 附錄"相對論思想發展之歷程"一篇,乃 Einstein 前歲東渡日本時,應西京帝國大學學生會之請,特爲講演者. 此篇雖非相對論之正文,然吾人讀之,可以窺見 Einstein 用心之一斑,然後知非常之人,所以能成非常之功,要不外在不肯輕易放過常人之所忽. 故此篇文字之足以引起吾人之觀感,亦恐非市上盛行之通俗相對論書所能比也.

余承尙志學會之囑,翻譯此書,荏苒將及一年,卒以課忙事多,遷延至於今年春假,始得抽暇執筆,又恐假期一滿,將無再行繼續之餘閒,遂併力爲之,幸於此短時間內脫稿. 然倉卒

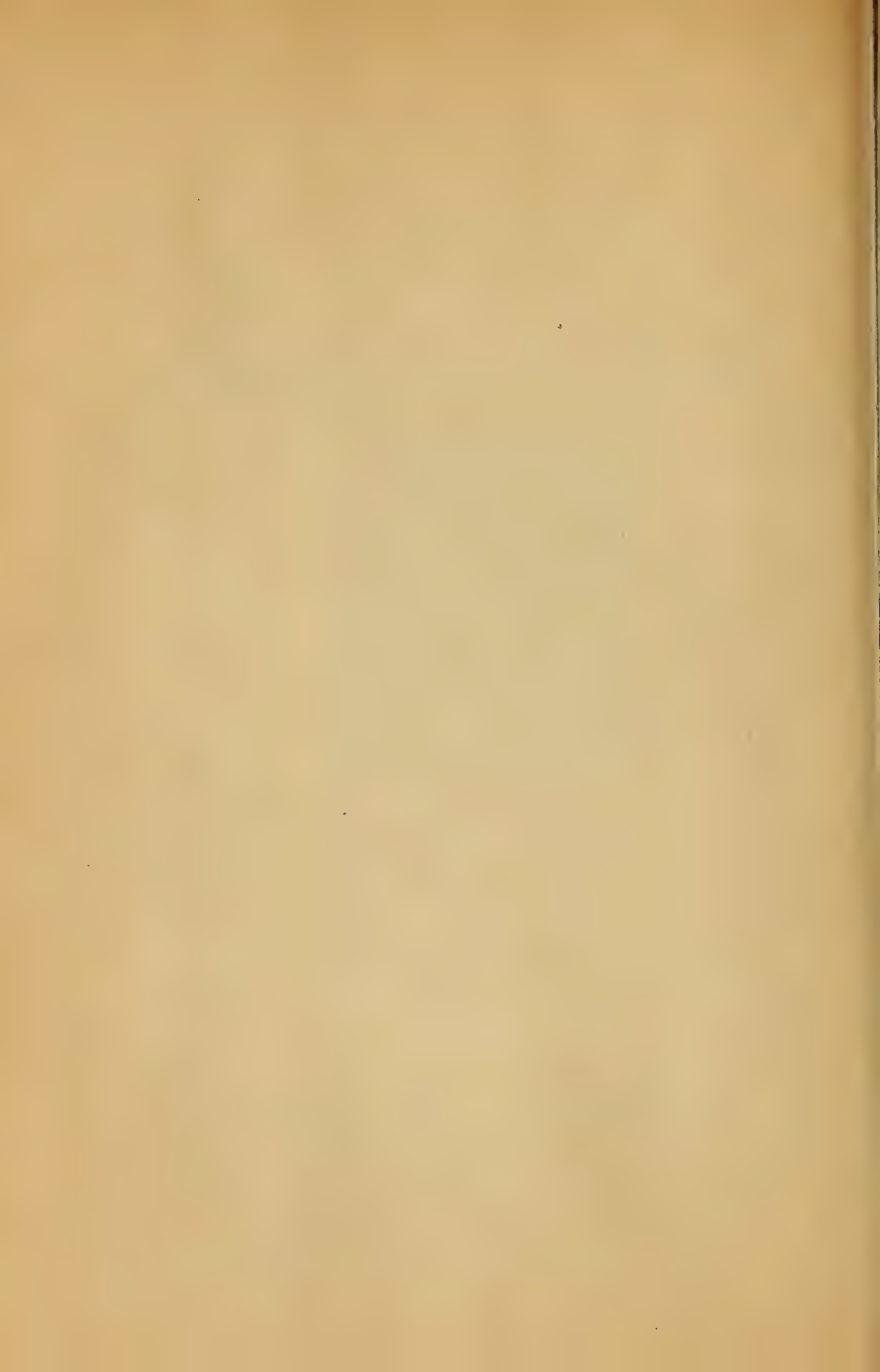
Einstein相對論之第一論文發表於一九〇五年德國"物理學年報(Annalen der Physik)." 其文題曰"論動體之電力學 (Zur Elektrodynamik bewegter Körper)." 所謂"相對原理(Das Prinzip der Relativität)"之名,卽見於此文中. 今所譯者,則一九〇七年Einstein發表於"放射學與電子學年報 (Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik)"之論文也. 此文之第一章說明相對原理之基礎,大致與一九〇五年所發表之論文同,然其說明方法,則較前所用者更平易而謹嚴. 故讀此文,卽可不必更讀一九〇五年之論文. 第三章與第四章論質量與能之關係;此問題關係物理學之根本觀念, Einstein曾於一九〇五年及一九〇七年反覆專論之者三次:其一爲一九〇五年物理學年報所載之"物體之惰性與其所容能量有關否?"一文,其二爲是年同一年報所載之"重心運動不變之原理與能之惰性"一文,其三則爲一九〇七年同一年報所載之"論相對原理所要求之能之惰性"一文是也. 然"相對原理及其推論,"發表在上述三文之後,故上述三文中所論者,皆可於此文之第三第四兩章中見之. 此外尚有Planck所發明之種種關係,亦收納於此二章之中,爲上述三文所未有. 第五章推廣相對原理於有

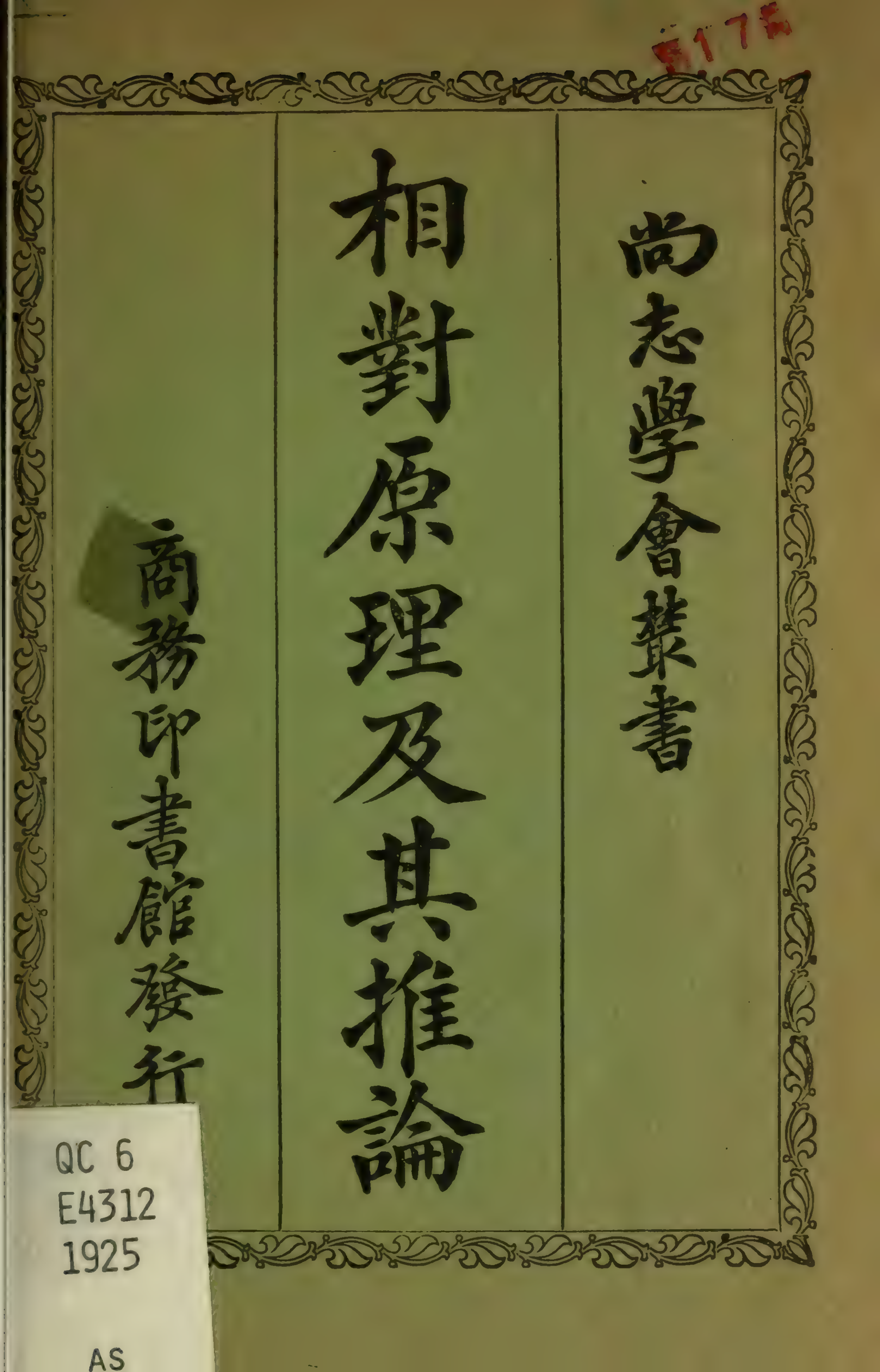
書如擇友,"是實足以發人深省之論,於初學者爲尤然. 初學之人,擇得其書,則事半而功倍;擇不得其書,不僅虛耗光陰與精神而已,謬解偏見,先入爲主,受害更非淺鮮也. 欲去此害,莫如直讀創作之論文. 蓋大家之創作論文,卽其思想之墨蹟,無論爲完爲缺,究竟本來面目,終非摹擬者所能比. 不寧惟是,凡偉大思想,雖由天才之衝動而生,然亦必有此環境,始能有此衝動. 吾人欲知一學說發生之際遇,亦不可不於原著論文之字裏行間求之. 此原論文之所以較教科書,尤能啟發學者之悱憤也. 雖然,科學論文與文學論文迥異,文學論文,有"不廢江河萬古流"者,科學論文則大抵轉眼之間,卽成陳蹟. Newton 之 Principia, 在科學史上雖有不朽之價値,然今日恐無如是迂遠之人,猶奉之爲物理學教科書者. 不過此可以言 Newton 之 Principia, 未可以言 Einstein 之相對論耳. 相對論自誕生至今,雖經無數專家之灌溉,枝葉逐年更新,然其根幹則依然如昨. 若論其根本思想,今日新刋之良書,能如 Einstein 原著論文之簡明者,恐亦未可多得.

故治物理學者,雖可不必讀 Newton 之原著,治相對論者,則不可不先讀 Einstein 之原著也. 本書之譯,亦由是故耳.

序

物理學爲自然科學中最難治之分科,相對論又爲物理學中最難解之一部. 此語幾成今日之定論矣. 然相對論果如是難解耶?余以爲此學說之所以竟成神奇,使人驚懼者,非其本性如此,實書之過也. 自一九一九年,英國皇家學會發表其南美日食觀測團之報告,宣言恒星光線掠過太陽面時,果受太陽之引力而曲折,如 Einstein 之所期,全球喧傳,稱爲科學界未曾有之盛事. 於是相對論之震動人心,幾不亞於社會主義;而解釋相對論之文籍,亦遂如雨後新筍,遍地大發. 新聞雜誌所載之短文,固不待言,卽連篇累葉之書,亦大有汗牛充棟之勢. 然其中專門之作,除 Weyl, Laue, Pauli, Eddington, Becquerrel 等所著者而外,通俗之作,除 Born, Mie, Einstein, Kirchberger, Freundlich, Eddington, 石原純等所著者而外,十之八九,大抵皆如佛經所謂一切衆生,各得其解者也. 故相對論之書,愈出愈多,而學相對論者,反愈讀愈迷,今日聞甲所云者如此,明日聞乙所云者又如彼;相對論本科學之學說,而一再相傳,竟成惝恍迷離不可捉摸之禪語矣. 語云:"擇




尚志學會叢書

相對原理及其推論

商務印書館發行

